

俄罗斯数学
教材选译

奇异摄动方程解的渐近展开

□ А.Б.瓦西里耶娃　В.Ф.布图索夫　著
□ 倪明康　林武忠　译



高等教育出版社
Higher Education Press

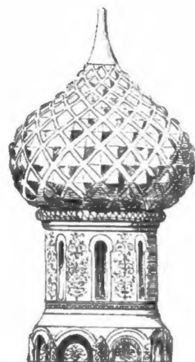
总 策 划：张小萍
责任编辑：赵天夫
封面设计：王凌波

本书是利用作者 А. Б. 瓦西里耶娃在 20 世纪 60 年代提出的"边界层函数法"，对奇异地依赖于小参数的常微分方程组、积分－微分方程组和时滞微分方程组等各种非线性系统定解问题进行近似求解和渐近分析的专著。其特点是系统地论述该方法的理论基础和运用该方法对各种问题的渐近解进行构造的过程，而且对定理、命题和结果都给出详细的推导和论证，是一本关于这类非线性微分方程组奇异摄动问题的基本理论著作。

本书适合于从事渐近方法的研究生、大学生、应用数学工作者以及需要处理各种非线性奇异摄动方程组数学模型的科技工作者，对于需要求解非线性方程组的物理、力学和工程技术人员也是一本有用的参考书。

■ 学科类别：数学
academic.hep.com.cn


ISBN 978-7-04-023063-5
9 787040 230635 >
定价 34.00 元



俄 罗 斯 数 学
教 材 选 译

● 数学天元基金资助项目

奇异摄动方程解的渐近展开

□ А.Б.瓦西里耶娃 В.Ф.布图索夫 著
□ 倪明康 林武忠 译



高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01-2007-0373 号

Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.

Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений, 1990

Originally published in Russian in the title

Asymptotic Methods in Singular-Perturbation Theory

by A. B. Vasil'eva and V. F. Butuzov

图书在版编目(CIP)数据

奇异摄动方程解的渐近展开/(俄罗斯)瓦西里耶娃,(俄罗斯)布图索夫著;倪明康,林武忠译 .—北京:高等教育出版社,2008.1

ISBN 978-7-04-023063-5

Ⅰ.奇… Ⅱ.①瓦…②布…③倪…④林… Ⅲ.奇异积分方程-高等学校-教材 Ⅳ.0175.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 191595 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 赵天夫 **封面设计** 王凌波 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京印刷一厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	13.25	**印　　次**	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	280 000	**定　　价**	34.00 元

物料号　23063-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

作者的中译本序

本书俄文版出版于三十年前, 此后奇异摄动理论中出现的新结果由作者介绍在后来的其他书中. 但是该书的重要特点是证明的推导十分详细. 对于希望进入奇异摄动领域和已经在该领域工作的人们来说, 这是一本不可多得的好教材. 在后面我们再出版的几本著作中, 由于新内容的出现而涉及面较广, 只能做综述性的介绍.

该书翻译工作的组织者是倪明康教授, 他在年青时代就对奇异摄动理论产生了浓厚的兴趣, 并在很大程度上掌握了俄语, 以后又在俄罗斯工作了近十年, 完成了博士论文的答辩, 并在多所大学任教, 因此他无论是在数学的研究方面还是在用俄语在数学的教学上都达到了很高的水平. 本书的译者林武忠教授具有相当好的俄语翻译能力和较高的奇异摄动理论知识造诣.

所以我们深信本书的翻译是准确和规范的. 勿庸置疑, 该中译本的出版对从事渐近方法, 特别是奇异摄动理论的中国年青学者会有很大的帮助, 因为目前该领域无论是在理论层面还是在各种实际问题的应用层面都在迅猛发展.

作者衷心地感谢倪明康教授和林武忠教授翻译本书.

A Б 瓦西里耶娃, В. Ф. 布图索夫

前　言

在近二十五年来, 许多从事微分方程渐近方法的同行越来越关注于最高阶导数前含有小参数的微分方程, 这种兴趣来自于自动控制理论、非线性振动理论、量子力学、气体动力学和一般动力学等学科迅猛发展的实际需要, 在这些领域中遇到了类型相似的微分方程.

构造这类方程解的渐近展开式是很困难的, 而运用通常 "经典" 方式对与其有关的小参数进行幂级数展开也是不可能的; 这是因为如果这时令小参数为零的话, 方程的阶数就会降低, 因此所得退化问题的解一般不满足所有的定解条件. 正因如此, 这类摄动就称为奇异摄动问题.

近年来有关奇异摄动问题的研究十分广泛, 也提出了解决这些问题各种各样的方法, 但是直到最近都没有一本完全致力于阐述这类问题的专著. 有关奇异摄动理论的材料基本上都包含在论文中. 这时必然缺少统一的方式和过于简单的陈述, 这就给无论是希望了解这方面问题的数学工作者, 还是从事于实际问题的人们都造成很大的困难. 即使阅读一系列综合评述报告, 例如 [16, 10], 甚至如瓦佐夫 (B. Вазов) 的译著 [12] 中的第十章也无法弥补这个空白点.

正像说过那样, 关于奇异摄动理论的材料, 按其问题的特点和方法, 是各种各样的; 要把这些都写入一本篇幅不是很大的书中是不可能的. 所以, 我们在这本专著中给自己提出的目标是在一定程度上只详细介绍奇异摄动理论中的一种对非线性方程组已仔细研究过的方法, 即所谓的边界层函数法, 以及关于用这个方法最适合解决的那些问题, 其中除了微分方程问题之外, 还有关于积分–微分方程和含小滞量的微分–差分方程问题.

本书的内容是以作者及其学生们和同事们的研究工作为基础写成的. 首先是从

全面提出奇异摄动问题和从介绍奇异摄动理论最基本的定理之一, 即吉洪诺夫 (A. H. Тихнов) 极限定理, 进行讲述. 其后顺序研究了常微分方程初值问题的渐近解、边值问题、积分–微分方程、以及最后微分–差分方程解的存在性和渐近解的问题.

我们注意到, 所有这些问题不仅都用统一的算法构造渐近解, 而且用统一方法证明基本定理. 为了避免重复, 在许多情况下省略了证明的细节, 并建议读者作为练习, 进行仔细证明. 为了更好的掌握本书内容, 在练习中对若干具体例子进行了详细的分析.

我们还要指出的是, 书中 §14 关于条件稳定情况的基本定理是最新结果, 至今尚未发表.

书中材料的叙述通俗易懂, 本书也完全适合于工程师和其他从事实际问题的人们.

作者

目　录

《俄罗斯数学教材选译》序

作者的中译本序

前　言

第一章　基本概念 **1**

§1. 解对参数的渐近近似概念 1

§2. 奇异摄动概念 2

§3. 奇异摄动方程组解的渐近表示特点和边界层 4

§4. 初值问题渐近解研究的基本方面 8

§5. 关于边界层函数法对其他问题的应用 10

第二章　极限过程理论 **12**

§6. 常微分方程一般理论的某些结果 12

§7. 吉洪诺夫定理 16

第三章　奇异摄动初值问题解对小参数的渐近展开 **24**

§8. 引论 24

§9. 在一般情况下构造奇异摄动初值问题解的渐近展开式算法 30

§10. 余项估计 35

§11. 某些注记和推广 52

第四章 边值问题 **55**

§12. 引论 55

§13. 单边界层的边值问题 57

§14. 条件稳定的情况 (有双边界层的边值问题) 68

§15. 含有内部边界层的边值问题 116

§16. 产生无穷大解值的边值问题 147

第五章 积分–微分方程的奇异摄动 **159**

§17. 初值问题解对小参数的渐近展开 159

§18. 关于积分–微分方程解的某些特殊渐近性质 168

第六章 小滞量微分–差分方程的奇异摄动问题 **176**

§19. 引论 176

§20. 构造问题 (6.1), (6.2) 解的渐近展开算法 177

§21. 余项估计 181

参考文献 **192**

后 记 **197**

第一章　基本概念

§1. 解对参数的渐近近似概念

在微分方程研究的历史初始阶段, 其基本目的就是求得方程的精确解; 但是后来才知道, 只有对极特殊的一些微分方程类型, 才有可能利用初等函数来有效表示它的精确解. 所以人们更急于找出构造微分方程近似解方法的问题. 这个问题已经从两个方面深入地进行了研究: 发展解的数值方法和发展解的渐近方法.

本专著中所研究的是关于含有小参数 μ 的微分方程的某些渐近方法; 这样的方程可以写成

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\mu). \tag{1.1}$$

假设方程 (1.1) 的解 $x(t,\mu)$ 是由某些定解条件所确定的. *所谓解 $x(t,\mu)$ 对参数 μ 的渐近近似 (或者渐近表示, 或者渐近公式) 我们认为是这样的函数 $X(t,\mu)$, 使得只要参数 μ 充分小, 而自变量 t 在给定区间中变化时, 这个渐近近似的余项, 即差 $x(t,\mu)-X(t,\mu)$, (在某种范数之下) 也很小. 我们还称 $x(t,\mu)-X(t,\mu)$ 当 μ 很小时的量阶阶数为渐近近似的精确度.*

所谓**渐近方法**, 我们通常是理解为**构造** $X(t,\mu)$ **的这样或那样的方法** (例如取关于 μ 的幂级数部分和的形式) ; 根据这些方法, 采用比 (1.1) 更为简单的方程来求得 $X(t,\mu)$; 而渐近方法的实际价值也正是与从这些更简单方程是否可能有效地确定 $X(t,\mu)$ 密切相关的.

不应当认为由于计算机的发展, 渐近方法的作用就变得不重要了; 实际上, 数值计算与渐近方法不是相互排斥, 而是相互补充的. 例如在许多情况下, 渐近近似的表达式就可以很方便地用来作为数值计算的零次近似. 然而从我们的观点来看, 数值

计算与渐近方法最密切的联系还表现在: 适合于该种渐近方法的那些方程渐近性质的研究正是任何一种数值方法理论中的主要方面之一. 例如, 微分方程数值解的差分格式 (见 [4]) 就含有某个小参数 h (步长), 而当采用这样的格式时, 就必须肯定用这种格式所得到的差分方程组的解, 当 h 充分小时确实接近于原来微分方程的解. 完全一样地, 当对不适定问题进行正则化时 (见 [55]), 也得到含有一个正则化小参数 α 的辅助方程, 而且问题也在于建立这个辅助方程的解与原来问题的解之间 (在某种确定意义下) 的近似性.

§2. 奇异摄动概念

我们考虑常微分方程组 (1.1). 假设 $f(x,t,\mu)$ 对其全体变量连续, 且当 x,t, μ 在某个区域中变化时对 x 满足李普希茨条件. 我们用某些定解条件, 例如初始条件

$$x(t_0,\mu)=x^0 \tag{1.2}$$

来确定方程组 (1.1) 的解 $x(t,\mu)$.

我们可以用下面的办法来求出 $x(t,\mu)$ 最简单的渐近表达式: 首先在前面的 (1.1) 式中令 $\mu=0$; 一般说来, 这时可以得到更简单的方程组

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=f(\overline{x},t,0). \tag{1.3}$$

其次用与 (1.2) 相同的初始条件, 即 $\overline{x}(t_0)=x^0$, 来确定这个方程的解 $\overline{x}(t)$. 我们自然希望, 如果 μ 充分小, 则 $\overline{x}(t)$ 会是 $x(t,\mu)$ 在上节中所指出的那种意义下的渐近近似. 深入地研究说明确实如此, 即当 $\mu\to 0$ 时, 差 $x(t,\mu)-\overline{x}(t)$ 是无穷小量, 而且这个差对 t 在区间 $[t_0,T]$ 上一致地趋于零. 这个结果在今天认为是古典的, 已包含在微分方程的教科书中. 我们将在第二章仔细地叙述这个结果.

现在考虑方程组

$$\mu\frac{dz}{dt}=F(z,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,y,t). \tag{1.4}$$

如果将这个方程组重新写成 (1.1) 的形式, 那么显然加在 (1.1) 右端的连续性条件已经不再满足了, 因为这时 μ 是在分母, 从而当 $\mu\to 0$ 时产生了奇异性.

然而我们还是想尝试一下在研究 (1.1) 时那样的方法来研究 (1.4), 即令 $\mu=0$ 来构造方程组 (1.4) 在满足某些定解条件之下的解的渐近近似. 这时不同于方程组 (1.3), 我们得到了方程组

$$0=F(\overline{z},\overline{y},t),\quad \frac{d\overline{y}}{dt}=f(\overline{z},\overline{y},t). \tag{1.5}$$

由于 (1.3) 的阶数与 (1.1) 是一样的, 因此 (1.3) 的解 $\overline{x}(t)$ 可以满足对 (1.1) 提出的定解条件 (1.2). 但是方程组 (1.5) 的解一般说来已经不可能再满足为了决定方程组

(1.4) 的解而提出的所有那些定解条件了, 因为方程组 (1.5) 的阶数低于 (1.4) 的阶数. 因此, 在给出 (1.4) 定解条件的点处, (1.5) 的解与 (1.4) 的解可能很不相同.

类似的现象我们不仅在研究微分方程组 (1.4) 的时候遇到, 而且在研究所谓的具有小滞量的微分–差分方程时也遇到. 这种方程的最简单例子是差分方程

$$z(t) = F(z(t-\mu), t); \tag{1.6}$$

这里的自变量 t 可以是连续变化, 也可以是离散的. 为了确定起见, 我们假设 t 取一系列的离散值: $0, \mu, 2\mu, \cdots$. 于是在 $t = 0$ 处给定初始条件

$$z(0) = z^0 \tag{1.7}$$

之后, 我们从 (1.6) 可以顺序地求出 $z(k\mu)$ 的值, $k = 1, 2, \cdots$, 亦即

$$z(\mu) = F(z^0, \mu), \quad z(2\mu) = F(z(\mu), 2\mu), \quad \cdots. \tag{1.8}$$

如果在 (1.6) 中令 $\mu = 0$, 则可得函数方程

$$\overline{z}(t) = F(\overline{z}(t), t); \tag{1.9}$$

由此 (在满足一定条件之下) 可以求出 t 的隐函数 $\overline{z}(t)$. 一般来说这个函数已不再满足条件 (1.7) 了. 因此, 如果提出 (1.9) 的解可以作为问题 (1.6), (1.7) 的近似解、并得出某种结论的话, 那么也可以对 (1.4) 和 (1.5) 提出同样的问题和得出类似的结论.

值得注意的是这两种情况不同于 (1.1) 与 (1.3) 之间关系的原因都是一样的, 即当 $\mu = 0$ 时改变了方程的类型, 或者说方程在如下的意义下是退化了, 即为了决定当 $\mu = 0$ 时方程的解所用的定解条件数目, 比为了决定原来方程的解所用的定解条件数目少 (特别对 (1.9) 来说, 根本不需要任何定解条件, 因为它是一个有限方程) . 由于这个原因, 许多作者都把方程组 (1.5) 和 (1.9) 称为*退化方程组*, 我们也将采用这种叫法.

人们通常把系统 (1.1) 称为系统 (1.3) 的*摄动系统*, 而且将一个不为零的小参数 μ 引入到系统中来的过程也叫做*摄动*. 这个术语也可以用于系统 (1.4), (1.5) 和系统 (1.6), (1.9), 不过在系统 (1.1), (1.3) 的情形下我们称它为*正则摄动*, 而对于系统 (1.4), (1.5) 和系统 (1.6), (1.9) 的情况将称为*奇异摄动*①. 换句话说, *将非摄动系统与含有不为零小参数的摄动系统进行比较, 如果发现为了决定摄动系统的解所需要的定解条件数目, 比为了决定非摄动系统的解所需要的定解条件数目来得多, 那么我们就称这样的摄动为奇异摄动*.

①或简称为**奇摄动** —— 译者注.

§3. 奇异摄动方程组解的渐近表示特点和边界层

为了确定起见, 在这一节我们就奇摄动系统 (1.4) 进行讨论.

尽管有上面指出的困难, 我们还是想利用 (1.5) 的解来求出 (1.4) 满足某些定解条件 (其究竟如何暂不具体化) 的解的渐近近似. 这时遇到如下两个需要立即解决的问题:

1. 当构造 (1.5) 的解时, 首先必须从 (1.5) 的第一个方程求出 z; 可是这个方程一般来说是非线性的, 因此它可能有几个形如 $z=\varphi(y,t)$ 的解, 我们应当从中选取哪一个解呢?

2. 如果采取某种方法对上述的解作出了选择 (例如在线性系统情况下, 一般只有一种可能性), 那么就可以将选到的 $z=\varphi(y,t)$ 代入 (1.5) 的第二个方程. 这时为了唯一确定所得到方程的解, 就必须对 y 给出定解条件. 但在上面说过, 加在 (1.4) 上的所有定解条件在此已经不能全部满足, 因此这就要问: 为了确定 (1.5) 的解, 应该保留加在 (1.4) 上的哪些定解条件和如何选取呢?

我们注意到无论上述哪一个问题, 对正则摄动系统 (1.1) 来说都不会发生.

我们现在转到奇摄动问题的其他特点. 为了能够更清楚地进行说明, 我们考虑一个不需要解决上面提出的那两个问题的例子, 即考虑一个最简单的线性方程式的初值问题

$$\mu\frac{dz}{dt}=az+b,\quad z(t_0,\mu)=z^0, \tag{1.10}$$

其中 a 和 b 是常数. 由于 (1.10) 式中的方程是线性方程, 因此第一个问题在此不存在. 而且这时 (1.5) 式只有第一个 (函数) 方程, 所以第二个问题也不存在. 现在的退化方程为

$$0=a\overline{z}+b; \tag{1.11}$$

由此即得

$$\overline{z}=-\frac{b}{a}. \tag{1.12}$$

直接积分 (1.10) 可得

$$z(t,\mu)=\left(z^0+\frac{b}{a}\right)\exp\left[\frac{a(t-t_0)}{\mu}\right]-\frac{b}{a}. \tag{1.13}$$

由此可见, 只有在满足某些特殊要求之下, $\overline{z}=-b/a$ 才会是 $z(t,\mu)$ 的渐近近似. 亦即为了使得 $\overline{z}$ 是 $z(t,\mu)$ 在 t_0 右边的渐近近似, 必须有 $a<0$ 且 $\mu\to0^+$ (见图 1), 或者 $a>0$ 且 $\mu\to0^-$. 对于这两种情形之一, 当 $t>t_0$, 且 $\mu\to0$ 时都有 $z(t,\mu)-\overline{z}\to0$. 而在点 t_0 处, 像在 §2 指出那样, 这是不成立的. 如果 $a>0$ 且 $\mu\to0^+$ 或者 $a<0$ 且 $\mu\to0^-$, 则 $\overline{z}$ 便是 $z(t,\mu)$ 在 t_0 左端的渐近近似, 但这时与在 t_0 右端的 $z(t,\mu)$ 没有任何关系, 因为这时对 $t>t_0$ 且当 $\mu\to0$ 时有 $z(t,\mu)\to\infty$. 如果 μ 按任何方式趋于 0, 则 $z(t,\mu)$ 既不趋于 $\overline{z}$ 也不趋于任何其他极限.

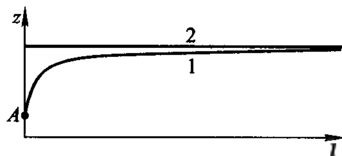


图 1　A 是坐标为 $(t=t_0, z=z^0)$ 的初始点. 1 是对于 $a<0, \mu>0$ 情况时, 方程 (1.10) 解 $z=z(t,\mu)$ 的图形. 2 是退化方程解的图形 —— 直线 $z=\overline{z}=-b/a$.

上述这些情况对于正则摄动系统 (1.1) 来说并不会出现, 因为当 μ 随意趋于 0 时, 问题 (1.3), (1.2) 的解就是问题 (1.1), (1.2) 解的渐近近似, 并不要求对函数 $f(x,t,\mu)$ 加上任何 (类似于在 (1.10) 中对 a 的符号) 的特殊要求, 而只需要求 $f(x,t,\mu)$ 满足某些像在 §2 开头时指出的光滑性条件就够了.

总之, 例 (1.10) 说明: 非摄动系统 (1.5) 的解只有在满足某些特定要求之下才可能是 (1.4) 的渐近近似, 对于特殊的系统 (1.10) 来说, 这些要求就是 a 的定号性和 μ 趋于 0 的单边性.

今后我们总认为在系统 (1.4) 中的 $\mu\to 0^+$, 而且只有这样的极限过程才成立, 因此将略去 0^+ 右上角的 "+" 号而简单写成 $\mu\to 0$.

正如上面已经指出那样, 对系统 (1.4) 右端的特定要求, 实质上是依赖于确定系统 (1.4) 解的那些定解条件的特性, 这种依赖性在本书的下一章将进一步加以阐明.

刚才我们只在某种程度上研究了这种依赖性的特点, 而且还是对一个十分简单的线性例子进行讨论; 下面我们考虑一个由两个常系数一阶方程组成的系统

$$\mu\frac{dz_1}{dt}=a_{11}z_1+a_{12}z_2+b_1,\quad \mu\frac{dz_2}{dt}=a_{21}z_1+a_{22}z_2+b_2; \tag{1.14}$$

其初始条件 (为了简单起见, 令 $t_0=0$) 是

$$z_1(0,\mu)=z_1^0,\quad z_2(0,\mu)=z_2^0. \tag{1.15}$$

系统 (1.14) 的通解为

$$\begin{cases} z_1(t,\mu)=c_1\alpha_{11}\exp\left(\dfrac{\lambda_1 t}{\mu}\right)+c_2\alpha_{12}\exp\left(\dfrac{\lambda_2 t}{\mu}\right)+\overline{z}_1,\\ z_2(t,\mu)=c_1\alpha_{21}\exp\left(\dfrac{\lambda_1 t}{\mu}\right)+c_2\alpha_{22}\exp\left(\dfrac{\lambda_2 t}{\mu}\right)+\overline{z}_2; \end{cases} \tag{1.16}$$

其中 λ_1,λ_2 为系统 (1.14) 的特征方程 $\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0$ 的根, 且为了简单起见假设它们是单根; α_{ik} 是一些不依赖于 μ 的确定常数, 这是因为 μ 只可能以组合形式 t/μ 出现; $\overline{z}_1,\overline{z}_2$ 是 (1.14) 的特解, 我们把它们取成与 (1.14) 所对应的退化方程组 (1.5) 的解, 即一组二元线性方程组的解; c_1,c_2 为任意常数.

为了满足初始条件 (1.15), 常数 c_1, c_2 应由方程组

$$\begin{cases} c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{12} + \overline{z}_1 = z_1^0, \\ c_1\alpha_{21} + c_2\alpha_{22} + \overline{z}_2 = z_2^0 \end{cases}$$

来决定. 由此可见, c_1 和 c_2 并不依赖于 μ. 将求得的 c_1, c_2 代入 (1.16) 之后, 不难相信: 如果

$$\mathrm{Re}\lambda_1 < 0, \quad \mathrm{Re}\lambda_2 < 0, \tag{1.17}$$

则当 $t > 0$ 时, 问题 (1.14), (1.15) 的解当 $\mu \to 0$ 时, 确实趋于退化方程组的解. 关于特征方程的根应有**负实部**的条件 (1.17), 正是在简单例子 (1.10) 中对 a 符号所加条件的推广.

如果 $\mathrm{Re}\lambda_1 > 0$, $\mathrm{Re}\lambda_2 > 0$, 则问题 (1.14), (1.15) 的解将在 $t < 0$ 当 $\mu \to 0$ 时趋于退化方程组的解.

如果特征方程根的实部有不同符号

$$\mathrm{Re}\lambda_1 < 0, \quad \mathrm{Re}\lambda_2 > 0, \tag{1.18}$$

(值得注意的是在给定的二维情况下, 这与 $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ 是一样的) 则初值问题的解无论在 $t = 0$ 的左边或在它的右边都不趋于退化方程的解 (当然应除去给定的 z_1^0 和 z_2^0 的值正好使得指数函数之一消失的特殊情形, 即 c_1 或 c_2 有一个为零的情形) . 但这时如果给定的不是初始条件 (1.15), 而是用边界条件

$$z_1(0, \mu) = z_1^0, \quad z_2(1, \mu) = z_2^0 \tag{1.19}$$

来确定 (1.14) 的解, 则容易看出, 在区间 $0 < t < 1$ 上当 $\mu \to 0$ 时, 这个解将趋于退化方程组的解, 而且不需要对 z_1^0, z_2^0 作特别的选择. 实际上, 将 (1.16) 代入 (1.19) 即得

$$\begin{cases} z_1^0 = c_1\alpha_{11} + c_2\alpha_{12} + \overline{z}_1, \\ z_2^0 = c_1\alpha_{21}\exp\left(\dfrac{\lambda_1}{\mu}\right) + c_2\alpha_{22}\exp\left(\dfrac{\lambda_2}{\mu}\right) + \overline{z}_2. \end{cases}$$

由此推出

$$c_1 = \frac{\beta_1\alpha_{22}\exp\left(\dfrac{\lambda_2}{\mu}\right) - \beta_2\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22}\exp\left(\dfrac{\lambda_2}{\mu}\right) - \alpha_{12}\alpha_{21}\exp\left(\dfrac{\lambda_1}{\mu}\right)} = \frac{\beta_1}{\alpha_{11}}\Big(1 + O(\mu)\Big),$$

$$c_2 = \frac{\beta_2\alpha_{11} - \beta_1\alpha_{21}\exp\left(\dfrac{\lambda_1}{\mu}\right)}{\alpha_{11}\alpha_{22}\exp\left(\dfrac{\lambda_2}{\mu}\right) - \alpha_{12}\alpha_{21}\exp\left(\dfrac{\lambda_1}{\mu}\right)} = \frac{\beta_2}{\alpha_{22}}\exp\left(-\frac{\lambda_2}{\mu}\right)\Big(1 + O(\mu)\Big);$$

其中 $\beta_1 = z_1^0 - \overline{z}_1, \beta_2 = z_2^0 - \overline{z}_2$, 而 $O(\mu)$ 在这里以及今后都是表示其量阶不比 μ 低的小量. 因此问题 (1.14),(1.19) 的解成为

$$z_1(t,\mu) = \beta_1\Big(1+O(\mu)\Big)\exp\left(\frac{\lambda_1 t}{\mu}\right) + \beta_2\frac{\alpha_{12}}{\alpha_{22}}\Big(1+O(\mu)\Big)\exp\left(\frac{\lambda_2(t-1)}{\mu}\right) + \overline{z}_1,$$

$$z_2(t,\mu) = \beta_1\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}}\Big(1+O(\mu)\Big)\exp\left(\frac{\lambda_1 t}{\mu}\right) + \beta_2\Big(1+O(\mu)\Big)\exp\left(\frac{\lambda_2(t-1)}{\mu}\right) + \overline{z}_2. \quad (1.20)$$

于是对 $0 < t < 1$, 当 $\mu \to 0$ 时, $z_1(t,\mu)$ 和 $z_2(t,\mu)$ 就趋于退化方程组的解 $\overline{z}_1$ 和 $\overline{z}_2$.

总之, 为了保证系统 (1.14) 的解趋向于其退化方程组的解, 其**条件**是与确定系统(1.14) 解的**定解条件形式**密切相关的.

此外, 上面所考虑的例子还给出了进一步研究系统 (1.14) 的解在这样一些点邻域中性质的可能性, 在这些点处, 加在系统 (1.14) 上的定解条件当方程组退化时被丢弃了.

我们现在转到对初值问题 (1.14), (1.15) 的解 (1.16) 进行讨论; 假设它满足条件 (1.17). 于是令 $\mu \to 0$ 取极限即得

$$\lim_{\mu\to 0} z_1(t,\mu) = \overline{z}_1, \quad \lim_{\mu\to 0} z_2(t,\mu) = \overline{z}_2;$$

如上所述, 这对于 $t > 0$ 是成立的. 但是我们注意到这些极限并非对 t 一致地成立. 在 $t = 0$ 附近出现这样的区域, 在该区域中无论 μ 多么小, 非退化方程的解都明显地不同于退化方程的解; 其实, 这是开始时就预料到的. 这种区域在简单例子 (1.10) 中 (见图 1) 就看到过.

在边值问题 (1.14), (1.19) 的解 (1.20) 中也存在同样类型的区域, 不过现在这种使得原来系统的解与退化系统的解之间明显不同的区域, 不仅仅出现在 $t = 0$ 的邻域, 而且出现在 $t = 1$ 的邻域.

在奇摄动问题中, 当 μ 任意小时, 可能产生原来 (摄动) 系统的解与退化系统的解之间明显不同的区域的这种现象, 我们称它为*边界层现象*, 而这个区域本身就叫做*边界层区域*, 或者简单地叫做*边界层*.

术语 "边界层" 来自流体动力学. 描写粘性流体的方程组相对于描写理想流体的方程组正好是奇摄动系统的典型例子. 在流体动力学中早已注意到, 即使在粘性极小的情况下, 理想流体方程组对所描写的例如在流线型物体边界附近流动的过程也不起作用 (例如绕流问题) ; 这种在物体边界附近的区域在流体动力学中就称为**边界层**. 从数学观点来看, 在流体动力学中产生这种现象的原因也是由于理想流体方程组的解不可能满足对粘性流体方程组成立的边界条件.

上面考察的线性例子 (1.14) 不仅说明了边界层的存在, 而且还给出了解在这个区域的构造. 我们看到, 在原来系统的解与退化系统的解之间的差具有**指数式衰减**的特性. 在 (1.16) 或 (1.20) 中的指数函数好像是在对退化解进行修正, 使得它能够

满足退化解本身无法满足的定解条件, 而且这些指数函数在初始点或边界点的邻域完成它们的作用之后, 随着离开这些初始点或边界点, 它们就指数式地消失了.

实际上, 在简单的线性情况 (1.14) 中所看到的规律性, 是具有相当一般意义的, *在十分广泛的一类情况下, 奇摄动系统的解在边界层中的性质是用指数式阻尼函数来描写的.* 对于这种情况的研究也是本书的基本目的.

§4. 初值问题渐近解研究的基本方面

我们现在转到一般情形的奇摄动方程组 (1.4), 并给定初始条件

$$z(t_0,\mu)=z^0, \quad y(t_0,\mu)=y^0. \tag{1.21}$$

正像对于最简单问题那样, 这个问题早就从构造其他渐近近似的观点进行了研究. 首先必须研究的问题是关于其精确解趋于退化方程组 (1.5) 解的极限过程问题. 这方面最完整的结果是在 A. H. 吉洪诺夫 (A. H. Тихонов) [54] 和 И. С. 格拉德什捷因 (И. С. Градштейн) [31] 的工作中得到的. 我们将在本书下一章介绍吉洪诺夫的结果.

当研究问题 (1.4), (1.21) 的解趋于退化系统 (1.5) 解的极限过程时, 如在 §3 开始时指出的那样, 应当注意到下面两个问题, 即关于选择方程 $F(z,y,t)=0$ 哪一个解的问题, 以及关于对退化系统 (1.5) 加上哪些初值问题. 此外, 如已经看到的那样, 还要求对系统 (1.4) 的右端函数加上某些特定条件. 在线性系统的情况下, 这些特定条件就是上面考虑过的有关其特征方程根的实部应具有一定符号的条件.

至于应该如何对退化方程组 (1.5) 加上初值问题, 在问题 (1.21) 的情况下, 自然是对 (1.5) 保留条件

$$\overline{y}(t_0)=y^0, \tag{1.22}$$

而丢弃加在 z 上的条件, 因为这时在退化系统 (1.5) 中, z 对 t 的导数已经不存在了; 我们将在下一章看到这样做确实是正确的. 至于如何选取方程 $F(z,y,t)=0$ 的解, 以及应对系统 (1.4) 的右端函数加上怎么样的特定条件的问题, 在此就很难先验地作出回答了. 这些问题也将在下一章同其他问题一起得到解决; 同时还将阐明这两个问题与李雅普诺夫稳定性理论之间的联系.

在下一章, 我们将同时证明当 $\mu\to 0$ 时, 问题 (1.4), (1.21) 的解趋于退化系统 (1.5) 满足条件 (1.22) 且按确定规则构造的某个解的极限过程定理. 这个极限过程不是像正则情形 (1.1), (1.2) 那样在区间 $t_0\leqslant t\leqslant T$ 上一致成立, 而只是在区间 $t_0<t\leqslant T$ 上成立 (在前面讨论的线性例子中, $T=+\infty$, 但一般情况并不是这样), 但是在集合 $t_0<\bar{t}_0\leqslant t\leqslant T$ 上一致成立, 这里 $\bar{t}_0$ 可以任意接近于 t_0, 但当 $\mu\to 0$ 时是固定的. 这个极限过程在区间 $t_0<t\leqslant T$ 上是不一致的, 这从上面给出的例子已经看到了.

这个结果意味着, 在奇摄动问题的情况下, 退化问题的解可以作为原来奇摄动问题的解在 §1 意义下的渐近近似, 但是这个近似只在区间 $\bar{t}_0 \leqslant t \leqslant T$ 上保证一致的精确度, 而不像正则情形那样能在整个区间 $t_0 \leqslant t \leqslant T$ 上保证一致的精确度. 从定量方面来看, 当方程右端对其变量足够光滑时, 这个精确度也同其他情况一样, 具有 μ 的量阶.

接下来自然是提出关于构造具有更高精确度的渐近近似问题.

为此, 对于正则摄动 (1.1) 的情形, 我们是采用如下办法, 即寻找 (1.1) 关于 μ 的幂级数形式解

$$x(t,\mu) = \overline{x}_0(t) + \mu\overline{x}_1(t) + \cdots + \mu^k\overline{x}_k(t) + \cdots. \tag{1.23}$$

将 (1.23) 代入 (1.1), 并将得到的式子两边对 μ 展开成幂级数的形式, 然后比较两边关于 μ 同次幂的系数; 由此不难得到决定 (1.23) 系数的方程: 关于 $\overline{x}_0(t)$ 的方程, 与非摄动方程 (1.3) 完全一样; 而对其余系数 $\overline{x}_k(t), k=1,2,\cdots$, 都是由线性方程确定的. 对于 $\overline{x}_0(t)$ 自然也是像对原来方程组 (1.1) 那样给定初始条件 $\overline{x}_0(t_0) = x^0$ (从而 $\overline{x}_0(t)$ 就与在 §2 中提到的方程 (1.3) 的解 $\overline{x}(t)$ 一致), 而对于 $\overline{x}_k(t), k=1,2,\cdots$, 则由零初始条件

$$\overline{x}_k(t_0) = 0, \quad k=1,2,\cdots \tag{1.24}$$

来决定. 有关这方面的更详细讨论将在下一章给出. 当 $f(x,t,\mu)$ 具有足够高阶的连续导数时, 则级数 (1.23) 的部分和

$$X_n(t,\mu) = \sum_{k=0}^{n} \mu^k\overline{x}_k(t) \tag{1.25}$$

就是问题 (1.1), (1.2) 的解在区间 $[t_0,T]$ 上具有一致精确度 $O(\mu^{n+1})$ 的渐近近似.

我们将称一个级数为某个函数 $x(t,\mu)$ 的渐近级数 (或渐近展开), 如果对任意正整数 n, 这个级数的 $n+1$ 项部分和 $X_n(t,\mu)$ 就是 $x(t,\mu)$ 以 $O(\mu^{n+1})$ 为精确度的渐近近似. 因此级数 (1.23) 就是问题 (1.1), (1.2) 的解的渐近展开. 我们往往不说对某个函数 "构造其渐近近似或者对它进行渐近展开", 而更简单地说成 "渐近地构造".

如果应用同样的方法到方程组 (1.4), 即找它形如 (1.23) 的解 (这时 x 是表示 y 和 z 的总体), 那么确实可以得到具有精确度 $O(\mu^{n+1})$ 的渐近近似; 但是这个近似只在区间 $\bar{t}_0 \leqslant t \leqslant T$ 上具有一致性. 这时必须注意到把应用于 (1.1) 的方法转移到 (1.4) 的情形时, 并不是简单地照搬, 例如给出决定系数 $\overline{x}_k(t), k=1,2,\cdots$, 的初始条件就不显然. 在正则情况下, 这些条件有 (1.24) 的形式; 如果类似于正则情况, 对 (1.4) 也假设 $\overline{y}_k(t_0) = 0, k=1,2,\cdots$ (对于 $\overline{z}_k(t)$ 不必给定初始条件, 因为在关于 $\overline{x}_k(t)$ 的方程组中, 只包含 $\overline{y}_k(t)$ 的导数; 换句话说, 关于 $\overline{x}_k(t)$ 的方程组也是阶数比原来 (1.4) 低的方程组. 确切地说, 是像 $\overline{x}_0(t)$ 所满足的 (1.5) 那样阶数的方程组), 那么用这样方法构造的级数 (1.23) 的部分和 (1.25) 并不能给出问题 (1.4), (1.21) 的解精确度比 μ 高的渐近近似. 在第三章我们将阐明, 为了使得部分和 (1.25) 在区间

$[t_0,T]$ 上保证有 $O(\mu^{n+1})$ 的一致精确度, 不应当假设 $\bar{y}_k(t_0)=0$, 而是等于某一个可按一定规则求出、一般来说不等于零的常数.

总之, 利用形如 (1.23) 的级数能够做到在区间 $[\bar{t}_0,T]$ 上对问题 (1.4), (1.21) 构造一致的渐近解. 但是否能够得到在整个区间 $[t_0,T]$ 上都保证一致精确度的渐近近似呢? 实践说明, 为此需要寻找方程组 (1.4) 的非 (1.23) 形式的解, 而是形如 (1.23) 与另外一个也是 μ 的幂级数之和的解, 不过后者的系数不依赖于 t, 而是依赖于 $\tau=(t-t_0)/\mu$, 即

$$x(t,\mu)=\bar{x}_0(t)+\mu\bar{x}_1(t)+\cdots+\Pi_0(\tau)+\mu\Pi_1(\tau)+\cdots, \tag{1.26}$$

这里采用的符号 Π 是来自俄文的词 "边界的" 第一个字母. 我们称级数

$$\Pi_0(\tau)+\mu\Pi_1(\tau)+\cdots+\mu^k\Pi_k(\tau)+\cdots$$

为*边界级数*. 它的项 (我们将称为*边界项*, 或者*边界函数*, 或者 *Π 函数*) 将按确定的规则求出, 这个规则将在第三章给出. 函数 $\Pi_k(\tau)$ 具有指数式衰减的特性, 即按范数估计不超过量

$$c\exp(-\chi\tau)=c\exp\left(-\frac{\chi(t-t_0)}{\mu}\right).$$

对于非线性方程组 (1.4), 边界函数起了在 (1.16) 中指数函数项所起的作用 [我们注意到在 (1.16) 中, 指数函数仅依赖于 $\tau=(t-t_0)/\mu=t/\mu(t_0=0)$], 即在初始时刻 t_0 的邻域中, 边界项补偿了当只利用级数 (1.26) 的正则部分 $\bar{x}_0(t)+\mu\bar{x}_1(t)+\cdots$ 时所出现的精确性的不足.

级数 (1.26) 的部分和

$$\sum_{k=0}^{n}\mu^k[\bar{x}_k(t)+\Pi_k(\tau)] \tag{1.27}$$

在整个区间 $[t_0,T]$ 上也保证了 $O(\mu^{n+1})$ 的一致渐近精确度.

将问题 (1.4), (1.21) 的解渐近展开成 (1.26) 型的级数, 首先是由 А. Б 瓦西里耶娃 (А. Б. Васильева) 提出来的 [13], 而后这个公式得到改进和完善.

在第三章, 我们将给出利用这个方法进行计算的详细步骤, 由此可以按顺序地决定问题 (1.4), (1.21) 的 (1.26) 形式的所有渐近展开项, 并将证明了边界函数项 $\Pi_k(\tau)$ 当 $\tau\to\infty$ 时的指数式衰减性, 以及推导出部分和 (1.27) 的渐近精确度估计.

§5. 关于边界层函数法对其他问题的应用

原来按照上面提出的同样办法不仅可以构造对于 (1.4) 初值问题的渐近解, 而且可以构造各种类型边值问题的渐近解, 某些更加复杂系统, 诸如积分–微分方程组的渐近解, 此外还可以构造性质上不同于 (1.4) , 例如差分方程组 (1.6) 和更一般的微

分–差分方程组的渐近解. 本书中讨论的问题只按如下特点进行选取, 亦即按可以用 (1.26) 的形式进行渐近展开.

我们约定把构造奇摄动系统形如级数 (1.26) 的解的渐近展开方法称为*边界层函数法*, 其中 (1.26) 的项是用某种统一的规则决定的. 我们这是由于现在同正则情况相比较, 出现了含有边界项的 (1.26) 是联合级数. 这些边界项在出现边界层现象的那些点的邻域中是相当大的 (换句话说, 就是在那些给出定解条件的点的邻域中, 且这些定解条件对退化系统来说是被丢掉了), 而当离开这个范围时却是指数式地减小. 我们在此之所以强调这个名称, 是因为在许多情况下, 可能出现不能用 (1.26) 形式的展开来描写的边界层现象, 例如在松弛振动 (见 [49, 43]), 以及在奇异初始条件下的非线性系统情形 (见 [26]), 就是如此.

在第四章我们将详细地讨论其渐近解可以用边界层函数法构造的边值问题. 在边值问题中, 当转到退化系统时, 定解条件的丢弃可能既在区间 $[t_0, T]$ 的左端, 同时又在区间的右端发生 (见例子 (1.14), (1.19)) . 这时对展开式 (1.26) 应补充在 $t = T$ 邻域中起像在 $t = t_0$ 邻域中的 Π_k 所起那样作用的项 Q_k. 此外, 当在区间 $[t_0, T]$ 上构造边值问题的渐近解时, 有时必须把区间分成几个部分, 在其中的每一部分上都应当含有该部分的形式如 (1.26) 的 Π 函数和 Q 函数 (内部边界层现象) .

在第五章我们把边界函数法应用到积分–微分方程的奇摄动问题, 而在第六章用同一方法到微分–差分方程. 对于微分–差分方程, Π 函数是按照对 (1.4) 同样的规则构造出来的, 但在函数性质方面, 它们不同于求解 (1.4) 时的 Π 函数, 而是一些不连续的 (阶梯形的) 函数 (见例 (1.6)) .

除了本书所考虑的问题外, 还有其他问题可用边界函数法进行求解. 例如在工作 [9] 中就考虑了退化方程具有解族的奇摄动方程 (既有微分方程又有差分方程), 这种情况从差分格式计算理论的观点来看是很有用的.

本书是专为非线性问题而写的, 但是许多有关线性方程的问题也可用上述方法来研究, 例如线性微分和积分算子的特征值和特征函数的问题. 本书不对这类问题进行讨论, 有兴趣的读者可参看文章 [24, 25].

第二章　极限过程理论

§6. 常微分方程一般理论的某些结果

一、关于微分方程组解的存在性、唯一性以及对参数的连续相依性定理　我们采用通常列向量的记号来记其元素为分量 $x^k(t), k=1,\cdots,m$ 的 m 维向量函数 $x(t)$

$$x(t)=\begin{pmatrix} x^1(t)\\ \vdots \\ x^m(t)\end{pmatrix}.$$

向量 $x(t)$ 的范数用等式

$$\| x(t) \| = \max_{1\leqslant k\leqslant m} |x^k(t)|$$

来定义.

现在我们叙述如下的经典定理 (但是在此略去了它的证明, 因为这些证明在许多常微分方程教科书中都可以找到, 例如见 [32]):

定理 2.1　令 x 和 f 为 m 维向量函数, λ 为数值参数; 假设方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t,\lambda) \tag{2.1}$$

满足如下条件:

1. 函数 $f(x,t,\lambda)$ 在闭区域

$$\| x-x^0 \| \leqslant b,\quad |t-t_0|\leqslant a,\quad |\lambda|\leqslant d \tag{2.2}$$

上有定义、连续, 从而在此区域上有 $\| f(x,t,\lambda) \| \leqslant M$, 这里 M 为某常数;

2. $f(x,t,\lambda)$ 在区域 (2.2) 上满足关于 x 的利普希茨条件

$$\| f(x_1,t,\lambda) - f(x_2,t,\lambda) \| \leqslant L \| x_1 \quad x_2 \|,$$

其中 $L>0$ 为与 x,t,λ 无关的常数;

那么在区间 $|t-t_0| \leqslant h = \min(a, b/M)$ 上存在方程组 (2.1) 满足条件

$$x(t_0,\lambda) = x^0$$

的唯一解 $x = x(t,\lambda)$, 而且这个解是 t 在 $|t-t_0| \leqslant h$ 上和 λ 在 $|\lambda| \leqslant d$ 上的连续函数.

注 1. 如果 $h < a$, 且 $\| x(t_0+h,\lambda) - x^0 \| < b$, 亦即当 $t = t_0 + h$ 时, 方程组 (2.1) 的解 $x(t,\lambda)$ 仍然位于区域 $\| x - x^0 \| \leqslant b$ 的内部, 那么从点 $(t_0+h, x(t_0+h,\lambda))$ 出发, 可以把解从 t_0+h 向右延拓到 t_0+h+h_1, 这里 $h_1>0$ 为某一常数. 解经过这样不断地延拓之后, 我们或者在某个 $t = t_1 < t_0 + a$ 达到等式 $\| x(t_1,\lambda) - x^0 \| = b$, 且解不能再向右延拓, 或者解在 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a$ 上存在且满足不等式 $\| x(t,\lambda) - x^0 \| \leqslant b$. 类似地可以研究解在点 t_0 左边的延拓.

2. 记

$$M_0 = \max_{\substack{|t-t_0|\leqslant a \\ |\lambda|\leqslant d}} \| f(x^0,t,\lambda) \| .$$

显然 $M_0 \leqslant M$; 不难证明 (见 [32]), 如果

$$\frac{M_0}{L}(e^{La}-1) \leqslant b, \tag{2.3}$$

那么解 $x(t,\lambda)$ 在 $|t-t_0| \leqslant a$ 上存在 (即 $h=a$)、不越出区域 $\| x - x^0 \| \leqslant b$, 并且是 t 和 λ 在 $|t-t_0| \leqslant a, |\lambda| \leqslant d$ 上的连续函数[①].

3. 代替定理 2.1 中的区间 $|t-t_0| \leqslant a$, 可以分别考虑区间 $[t_0, t_0+a]$ 及 $[t_0-a, t_0]$. 本节将主要在区间 $[t_0, t_0+a]$ 上进行讨论.

二、辅助引理 定理 2.1 断定解只在区间 $|t-t_0| \leqslant h \leqslant a$ 上存在, 这并不表示解一定在整个区间 $|t-t_0| \leqslant a$ 上存在; 在注 2 中指出了解在整个区间 $|t-t_0| \leqslant a$ 上存在的条件. 有时也出现对某个 λ 值来说, 解在整个区间 $|t-t_0| \leqslant a$ 上存在, 而对其他的 λ 值, 当 $|t-t_0| < a$ 时就达到等式 $\| x - x^0 \| = b$, 且以后不能再延拓. 假设对某个 λ 值, 例如 $\lambda = 0$, 解在整个区间 $|t-t_0| \leqslant a$ 上存在, 是否当 $|\lambda|$ 值充分小时, 解也在整个区间 $|t-t_0| \leqslant a$ 上存在呢? 这个问题对今后的讨论很重要, 下面的定理 2.2 将对此作出肯定的回答, 其证明是根据如下引理:

引理 2.1 令 u 和 F 为 m 维向量函数, λ 为参数; 假设方程组

$$\frac{du}{dt} = F(u,t,\lambda) \tag{2.4}$$

满足如下条件:

[①]这个结论可直接由 Gronwall 不等式推出 —— 译者注.

1. 函数 $F(u,t,\lambda)$ 在区域

$$\| u \| \leqslant b,\ t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a,\ |\lambda| \leqslant d$$

上有定义、连续, 且对 u 满足以 L 为利普希茨常数的利普希茨条件;

2. 对一切 $t \in [t_0, t_0 + a]$ 有

$$F(0,t,0) = 0; \tag{2.5}$$

3. $t_0(\lambda)$ 为 $\lambda \in [-d,d]$ 的连续函数, 且当 $|\lambda| \leqslant d$ 时有

$$t_0 \leqslant t_0(\lambda) \leqslant t_0 + a; \tag{2.6}$$

那么存在 $\lambda_0 \in (0,d]$, 使得当 $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ 时, 方程组 (2.4) 满足条件

$$u(t_0(\lambda), \lambda) = 0 \tag{2.7}$$

的解 $u(t,\lambda)$ 在整个区间 $[t_0, t_0+a]$ 上存在, 且对 $t \in [t_0, t_0+a]$ 一致地满足

$$\lim_{\lambda \to 0} u(t,\lambda) = 0. \tag{2.8}$$

证明 因为从 (2.6) 即知, 对所有 $t \in [t_0, t_0+a]$ 有不等式 $|t - t_0(\lambda)| \leqslant a$ 成立, 所以根据定理 2.1 的注 2, 若满足不等式 (2.3), 则问题 (2.4), (2.7) 的解 $u(t,\lambda)$ 当 $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ 时就在整个区间 $[t_0,\ t_0+a]$ 上存在. 而且这时由 (2.7) 有

$$M_0 = \max_{\substack{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+a \\ |\lambda| \leqslant \lambda_0}} \| F(0,t,\lambda) \| .$$

此外, 由 (2.5) 得出, 如果 λ_0 充分小, 那么当 $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ 时, $\| F(0,t,\lambda) \|$ 可任意小. 因此存在这样的 λ_0, 使得当 $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ 时, 不等式 (2.3) 成立, 亦即解 $u(t,\lambda)$ 当 $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ 时在整个区间 $[t_0, t_0+a]$ 上存在且为 t 和 λ 的连续函数. 又由 (2.5) 即见, 方程 (2.4) 满足零初始条件 (2.7) 的解当 $\lambda = 0$ 时为 $u(t,0) = 0$, 由此及 $u(t,\lambda)$ 的连续性即得 (2.8). 引理 2.1 证毕. □

三、微分方程组的解对含于方程组右端和初始条件中的参数的连续依赖性定理 我们重新考虑方程组 (2.1), 并对它就下面证明定理 2.3 时所需要的形式, 来证明解对进入方程组右端和初始条件中的参数 λ 的连续依赖性定理. 设 D 为变量 (x,t) 空间中的开区域, 我们记 $G = D \times (|\lambda| \leqslant d)$.

定理 2.2 假设方程组 (2.1) 满足条件:

1. 函数 $f(x,t,\lambda)$ 在区域 G 中有定义、连续, 且在 G 中对 x 满足利普希茨条件.

2. 由 (2.1) 式中令 $\lambda = 0$ 所得到的方程组

$$\frac{d\overline{x}}{dt} = f(\overline{x}, t, 0), \tag{2.9}$$

在区间 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a$ 上存在满足条件

$$\overline{x}(t_0) = x^0 \tag{2.10}$$

的解 $\overline{x} = \overline{x}(t)$, 而且解 $\overline{x}(t)$ 不越出区域 D, 亦即当 $t \in [t_0, t_0 + a]$ 时,

$$(\overline{x}(t),\, t) \in D. \tag{2.11}$$

3. 当 $|\lambda| \leqslant d$ 时, $t_0(\lambda)$ 和 $\delta(\lambda)$ 为满足

$$t_0 \leqslant t_0(\lambda) \leqslant t_0 + a, \quad t_0(0) = t_0, \quad \delta(0) = 0 \tag{2.12}$$

的 λ 的连续函数;

那么存在 λ_0 $(0 < \lambda_0 \leqslant d)$, 使得当 $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ 时, 方程组 (2.1) 满足条件

$$x(t_0(\lambda), \lambda) = x^0 + \delta(\lambda) \tag{2.13}$$

的解 $x(t, \lambda)$ 在区间 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a$ 上存在, 且对 $t \in [t_0,\, t_0 + a]$ 时一致地满足

$$\lim_{\lambda \to 0} x(t, \lambda) = \overline{x}(t). \tag{2.14}$$

证明 显然, 当 $t = t_0(\lambda)$ 时, $\overline{x}(t)$ 满足不等式

$$\| \overline{x}(t_0(\lambda)) - x^0 \| \leqslant M(t_0(\lambda) - t_0),$$

其中 $M = \max\limits_{t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a} \| f(\overline{x}(t), t, 0) \|$. 由此并根据 (2.12) 式, 亦即当 $\lambda \to 0$ 时有 $t_0(\lambda) \to t_0$, 得出 $\overline{x}(t_0(\lambda)) = x^0 + \varepsilon(\lambda)$, 这里 $\varepsilon(\lambda)$ 为 $\lambda \in [-d, d]$ 的连续函数, 且 $\varepsilon(0) = 0$. 我们记 $\Delta(\lambda) = \delta(\lambda) - \varepsilon(\lambda)$, 并引进新的函数 u 来代替 x :

$$u(t, \lambda) = x(t, \lambda) - \overline{x}(t) - \Delta(\lambda). \tag{2.15}$$

将 $x(t, \lambda) = \overline{x} + u(t, \lambda) + \Delta(\lambda)$ 代入 (2.1) 和 (2.13) 之后可得关于 $u(t, \lambda)$ 的微分方程组

$$\frac{du}{dt} = F(u, t, \lambda) \equiv f(\overline{x}(t) + u + \Delta(\lambda), t, \lambda) - f(\overline{x}(t), t, 0), \tag{2.16}$$

及初始条件

$$u(t_0(\lambda), \lambda) = 0. \tag{2.17}$$

因为 $\Delta(0) = 0$, 所以当 $t \in [t_0,\, t_0 + a]$ 时有 $F(0, t, 0) = 0$, 即方程组 (2.16) 满足引理2.1的条件 (2.5). 由于当 $t \in [t_0,\, t_0 + a]$ 时有 $(\overline{x}(t),\, t) \in D$ (见 (2.11)), 所以存在充分小的 $b > 0$ 和 $\lambda_0 > 0$, 使得只要 $\|u\| \leqslant b$ 和 $|\lambda| \leqslant \lambda_0$, 则对一切 $t \in [t_0,\, t_0 + a]$ 都有点 $(\overline{x}(t) + u + \Delta(\lambda),\, t) \in D$. 亦即函数 $F(u, t, \lambda)$ 在区域 $\|u\| \leqslant b$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a$, $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ 上有定义、连续, 且对 u 满足利普希茨条件, 从而满足引理2.1的所有条件. 由引

理2.1知道当 λ_0 充分小时, 问题 (2.16), (2.17) 的解 $u(t,\lambda)$ 当 $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ 时在区间 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a$ 上存在, 且极限等式 $\lim\limits_{\lambda\to 0} u(t,\lambda) = 0$ 对 $t \in [t_0, t_0+a]$ 一致地成立. 由此及 (2.15) 即得, 问题 (2.1), (2.13) 的解 $x(t,\lambda)$ 当 $|\lambda| \leqslant \lambda_0$ 时在区间 $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + a$ 上存在, 以及极限等式 (2.14) 成立. 定理 2.2 证毕. □

§7. 吉洪诺夫定理

一、问题的提出 我们现在考虑微分方程组

$$\mu\frac{dz}{dt} = F(z,y,t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z,y,t); \tag{2.18}$$

其中 z 和 F 为 M 维向量函数, y 和 f 为 m 维向量函数, $\mu > 0$ 为小参数.

我们给定初始条件 (为了简单起见令 $t_0 = 0$)

$$z(0,\mu) = z^0, \quad y(0,\mu) = y^0; \tag{2.19}$$

这里假设 z^0, y^0 与 μ 无关, 并在区间 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上研究问题 (2.18), (2.19) 的解 $z(t,\mu)$, $y(t,\mu)$.

如果在 (2.18) 式中令 $\mu = 0$, 那么就得到方程组

$$0 = F(\overline{z},\overline{y},t), \quad \frac{d\overline{y}}{dt} = f(\overline{z},\overline{y},t). \tag{2.20}$$

由于这组方程的前 M 个是函数方程而不是微分方程, 它的总阶数要比方程组 (2.18) 低. 因此在上一章 §2 中我们称它为**退化方程组**. 于是对 (2.20) 给出的初始条件数目应该比 (2.18) 给出的初始条件数目少. 正如在 §4 中指出过那样, 最自然是保留 y 的初始条件, 即令

$$\overline{y}(0) = y^0, \tag{2.21}$$

而丢掉 z 的初始条件.

我们要提出的问题是: 当 μ 充分小时, 问题 (2.18), (2.19) 的解 $z(t,\mu), y(t,\mu)$ 是否接近于退化问题 (2.20), (2.21) 的解 $\overline{z}(t), \overline{y}(t)$ 呢? 关于解对参数的连续依赖性定理 2.2 在这里不能用, 这是因为方程组 (2.18) 不是属于方程组 (2.1) 那种类型; 这时若将 (2.18) 写成 (2.1) 的形式, 则当 $\mu = 0$ 时其右端就不连续. 因而令 $\mu = 0$ 所得到的方程组 (2.20) 在性质上就不同于从 (2.1) 当 $\lambda = 0$ 时得到的方程组, 因为方程组 (2.20) 的阶数低于原来方程组 (2.18) 的阶数; 而在定理2.2那时看到的情况是方程组 (2.9) (当 $\lambda = 0$ 时的退化方程组) 的阶数, 它与原来方程组 (2.1) 的阶数是一样的.

为了求解 (2.20), 应从它的第一组方程 $0 = F(\overline{z},\overline{y},t)$ 选出解 $\overline{z} = \varphi(\overline{y},t)$ (正如在上一章 §3 指出那样, 由于 F 的非线性, 求出的解 $\overline{z}$ 不一定唯一, 因此就产生应选取

哪一个解的问题), 然后将所选出的解 $\overline{z} = \varphi(\overline{y}, t)$ 代入 (2.20) 的第二组方程, 并求解得到的方程组初值问题

$$\frac{d\overline{y}}{dt} = f(\varphi(\overline{y}, t), \overline{y}, t), \quad \overline{y}(0) = y^0. \tag{2.22}$$

可以想见, $\overline{z}(t) = \varphi(\overline{y}(t), t)$ 一般来说是不会再满足 (2.19) 对 z 所加的初始条件, 亦即 $\overline{z}(0) \neq z^0$; 因此至少在初始点 $t = 0$ 的某个邻域里, 退化方程组的解 $\overline{z}(t)$ 不会接近于原来方程组 (2.18) 的解 $z(t, \mu)$. 是否在这个邻域之外就有 $z(t, \mu)$ 接近于 $\overline{z}(t)$ 呢? 完全一样, 当 $0 < t \leqslant T$ 时, $\overline{y}(t)$ 是否接近于退化解 $y(t, \mu)$ 呢? (我们注意到由于 (2.19) 和 (2.21), 当 $t = 0$ 时, $\overline{y}(0)$ 与 $y(0, \mu)$ 是相同的.) 这些问题的回答可能是肯定的, 也可能是否定的, 这完全决定于对 (2.18) 和 (2.20) 所加的条件. 特别是依赖于解 $\overline{z} = \varphi(\overline{y}, t)$ 的选取. 下面给出的定理 2.3 对这些问题作出了肯定的回答. 我们注意到, 对于考虑在 §6 中的方程组 (2.1) 来说, 上述问题已在定理 2.2 得到肯定的回答. 按照 §2 中的术语, 我们称其解连续依赖于参数 λ 的方程组 (2.1) 为*正则摄动的方程组*; 与此不同的是, 对于当退化时 ($\mu = 0$) 发生降阶的方程组 (2.18), 我们称它为奇异摄动的方程组, 或者*奇异摄动方程组*.

二、吉洪诺夫 (Тихонов) 定理的叙述 对于奇异摄动方程组 (2.18), 我们要求它满足下列条件:

I. *函数 $F(z, y, t)$ 和 $f(z, y, t)$ 在变量 (z, y, t) 空间的某个开区域 G 中连续, 且对 z 和 y 满足利普希茨条件.*

II. *方程 $F(z, y, t) = 0$ 在变量 (y, t) 空间的某个有界闭域 $\overline{D}$ 上存在满足下列条件的解 (根) $z = \varphi(y, t)$:*

1. $\varphi(y, t)$ 为 (y, t) 在 $\overline{D}$ 上的连续函数;

2. 当 $(y, t) \in \overline{D}$ 时有点 $(\varphi(y, t), y, t) \in G$;

3. 根 $z = \varphi(y, t)$ 在 $\overline{D}$ 上是孤立的, 亦即存在 $\eta > 0$, 使得当 $(y, t) \in \overline{D}, 0 < \| z - \varphi(y, t) \| < \eta$ 时有 $F(z, y, t) \neq 0$.

III. *初值问题 (2.22) 在区间 $[0, T]$ 上有唯一解 $\overline{y}(t)$, 而且当 $t \in [0, T]$ 时, 点 $(\overline{y}(t), t) \in D$, 这里 D 为闭域 $\overline{D}$ 的内点集. 此外, 我们还假设对 $(y, t) \in \overline{D}$ 有 $f(\varphi(y, t), y, t)$ 关于 y 满足利普希茨条件.*

我们现在 (按照吉洪诺夫的说法) 引进所谓的*附加方程组*

$$\frac{d\widetilde{z}}{d\tau} = F(\widetilde{z}, y, t), \quad \tau \geqslant 0; \tag{2.23}$$

其中 y 和 t 看成参数. 根据条件 II, $\widetilde{z} = \varphi(y, t)$ *为方程组 (2.23) 当 $(y, t) \in \overline{D}$ 时的孤立奇点*. 我们进一步假设:

IV. *方程组 (2.23) 的奇点 $\widetilde{z} = \varphi(y, t)$ 是在利雅普诺夫意义下关于 $(y, t) \in \overline{D}$ 一*

致渐近稳定的.

这就意味着对任意的 $\varepsilon > 0$, 总存在着 (一般对所有 $(y,t) \in \overline{D}$) $\overline{\delta}(\varepsilon) > 0$, 使得只要 $\| \widetilde{z}(0) - \varphi(y,t) \| < \overline{\delta}(\varepsilon)$, 就有 $\| \widetilde{z}(\tau) - \varphi(y,t) \| < \varepsilon$ 对一切 $\tau \geqslant 0$ 成立, 而且当 $\tau \to \infty$ 时有 $\widetilde{z}(\tau) \to \varphi(y,t)$.

当满足条件 IV 时, 就称根 $\widetilde{z} = \varphi(y,t)$ 在区域 $\overline{D}$ 上是稳定的.

我们现在考虑当 $y = y^0$, $t = 0$ 时的附加方程组 (2.23):

$$\frac{d\widetilde{z}}{d\tau} = F(\widetilde{z}, y^0, 0), \quad \tau \geqslant 0; \tag{2.24}$$

以及初始条件

$$\widetilde{z}(0) = z^0. \tag{2.25}$$

由于初值 z^0 一般并不接近于奇点 $\varphi(y^0, 0)$, 因此问题 (2.24), (2.25) 的解 $\widetilde{z}(\tau)$ 当 $\tau \to \infty$ 时可以不趋向于 $\varphi(y^0, 0)$. 因此还需要假设:

V. 问题 (2.24), (2.25) 的解 $\widetilde{z}(\tau)$ 满足下列条件:

1. 当 $\tau \to \infty$ 时, $\widetilde{z}(\tau) \to \varphi(y^0, 0)$;
2. 对一切 $\tau \geqslant 0$ 都有点 $(\widetilde{z}(\tau), y^0, 0) \in G$.

这时按照吉洪诺夫的说法, 将称初始值 z^0 属于奇点 $\widetilde{z} = \varphi(y^0, 0)$ 的影响域. 我们在此不仔细地研究有关影响域的结构问题, 而只注意由于奇点 $\widetilde{z} = \varphi(y^0, 0)$ 的渐近稳定性, 因此至少所有充分接近于它的点必须属于它的影响域. 当 z 为数值函数时, 其影响域的结构问题可以较简单地得到解决, 这将在本节的第五段进行讨论.

定理 2.3 (吉洪诺夫定理) 如果满足条件 I ~ V, 那么存在常数 $\mu_0 > 0$, 使得当 $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时, 问题 (2.18), (2.19) 在区间 $[0, T]$ 上存在唯一满足极限等式

$$\lim_{\mu \to 0} y(t, \mu) = \overline{y}(t), \quad \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2.26}$$

$$\lim_{\mu \to 0} z(t, \mu) = \overline{z}(t) = \varphi(\overline{y}(t), t), \quad \text{当 } 0 < t \leqslant T \tag{2.27}$$

的解 $x(t, \mu), y(t, \mu)$.

三、辅助引理 我们用 U_ε 记 (z, y, t) 空间中满足条件 $\| z - \varphi(y,t) \| < \varepsilon$, $(y,t) \in D$ 的点集.

我们用记号 $\{x: Q\}$ 来表示具有某种性质 Q 的点 x 的集合, 于是

$$U_\varepsilon = \{(z, y, t) : \| z - \varphi(y,t) \| < \varepsilon, \ (y,t) \in D\};$$

以 $\overline{U}_\varepsilon$ 记 U_ε 的闭包, 即

$$\overline{U}_\varepsilon = \{(z, y, t) : \| z - \varphi(y,t) \| \leqslant \varepsilon, \ (y,t) \in \overline{D}\}.$$

引理 2.2 假设满足条件 I ~ IV, 并令 $\varepsilon > 0$ 为使得 $\overline{U}_\varepsilon \subset G$ 的任意小的数; 那么存在着正数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 和 $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon)$, 使得只要 $0 < \mu \leqslant \mu_0$, 就有方程组 (2.18) 满足初始点 $(z(t_0, \mu), y(t_0, \mu), t_0) \in U_\delta$ 的解 $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ 在 $t \geqslant t_0$ 上存在、唯一, 而且只要 $(y(t, \mu), t) \in D$, 则点 $(z(t, \mu), y(t, \mu), t)$ 就不离开 U_ε.

证明 我们从区间 $(0, \overline{\delta}(\varepsilon/2))$ 中任取一数作为 δ, 这里 $\overline{\delta}(\varepsilon/2)$ 由条件 IV 所确定. 首先由条件 I 推出: 至少在初始点的某个邻域里, 解存在唯一. 其次根据定理 2.1 的注 1, 若解不越出 U_ε, 则可用唯一的方法延展. 于是剩下的只需要证明存在 $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon) > 0$, 使得当 $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 且 $(y(t, \mu), t) \in D$ 时, 解就不会越出 U_ε. 如果我们假定这样的 μ_0 不存在, 那么必定存在序列 $\{\mu_n\}$: 当 $n \to \infty$ 时有 $\mu_n \to 0$, 使得对应于 μ_n 的解 $z(t, \mu_n), y(t, \mu_n)$ 具有如此性质: 初始点 $(z(\mathring{t}_n, \mu_n), y(\mathring{t}_n, \mu_n), \mathring{t}_n) \in U_\delta$, 其次在 $t > \mathring{t}_n$ 直到某个时刻 $t = \overline{t}_n$ 之前, 解 $z(t, \mu_n), y(t, \mu_n)$ 满足条件

$$\| z(t, \mu_n) - \varphi(y(t, \mu_n), t) \| < \varepsilon, \quad (y(t, \mu_n), t) \in D,$$

而当 $t = \overline{t}_n$ 时有

$$\| z(\overline{t}_n, \mu_n) - \varphi(y(\overline{t}_n, \mu_n), \overline{t}_n) \| = \varepsilon, \quad (y(\overline{t}_n, \mu_n), \overline{t}_n) \in D. \tag{2.28}$$

我们用 t_n 记解 $z(t, \mu_n), y(t, \mu_n)$ 在区间 $(\mathring{t}_n, \overline{t}_n)$ 中与 $\overline{U}_\delta$ 边界相交的最大 t 值, 即 $\| z(t_n, \mu_n) - \varphi(y(t_n, \mu_n), t_n) \| = \delta$, 且当 $\mathring{t}_n < t_n < t < \overline{t}_n$ 时有

$$\delta < \| z(t, \mu_n) - \varphi(y(t, \mu_n), t) \| < \varepsilon. \tag{2.29}$$

点列 $(z(t_n, \mu_n), y(t_n, \mu_n), t_n) \in \overline{U}_\delta$, 因此从中可以选取一个收敛子列, 我们不妨还用这序列本身来表示; 因此当 $n \to \infty$ 时有

$$(z(t_n, \mu_n), y(t_n, \mu_n), t_n) \to (\mathring{z}, \mathring{y}, \mathring{t}),$$

显然, 极限点 $(\mathring{z}, \mathring{y}, \mathring{t}) \in \overline{U}_\delta$.

此外, 当 $\mu = \mu_n$ 时在方程组 (2.18) 中进行自变量替换 $\tau = \dfrac{t - t_n}{\mu_n}$, 这就把方程组变成如下形式

$$\frac{dz}{d\tau} = F(z, y, t_n + \mu_n\tau), \quad \frac{dy}{d\tau} = \mu_n f(z, y, t_n + \mu_n\tau).$$

于是所考虑的解就变成 $z(t, \mu_n) = z(t_n + \mu_n\tau, \mu_n)$, $y(t, \mu_n) = y(t_n + \mu_n\tau, \mu_n)$, 作为 τ 的函数, 这个解显然满足得到的方程组和初始条件

$$z|_{\tau=0} = z(t_n, \mu_n), \quad y|_{\tau=0} = y(t_n, \mu_n).$$

由于定理2.2, 在任意有限区间 $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0'$ 上, 关于 $\tau \in [0, \tau_0']$ 一致地满足极限等式

$$\lim_{n\to\infty} z(t_n + \mu_n\tau, \mu_n) = \widetilde{z}(\tau), \quad \lim_{n\to\infty} y(t_n + \mu_n\tau, \mu_n) = \widetilde{y}(\tau), \tag{2.30}$$

其中 $\widetilde{z}(\tau),\widetilde{y}(\tau)$ 为问题

$$\frac{d\widetilde{z}}{d\tau}=F(\widetilde{z},\widetilde{y},\mathring{t}),\quad \frac{d\widetilde{y}}{d\tau}=0;\quad \widetilde{z}(0)=\mathring{z},\quad \widetilde{y}(0)=\mathring{y}$$

的解; 显然 $\widetilde{y}(\tau)\equiv\mathring{y}$, 而 $\widetilde{z}(\tau)$ 为附加方程组初值问题

$$\frac{d\widetilde{z}}{d\tau}=F(\widetilde{z},\mathring{y},\mathring{t}),\quad \widetilde{z}(0)=\mathring{z}$$

的解. 因为 $\|\mathring{z}-\varphi(\mathring{y},\mathring{t})\|=\delta<\overline{\delta}(\varepsilon/2)$, 所以由 IV 即知, 当 $\tau\geqslant 0$ 时有 $\|\widetilde{z}(\tau)-\varphi(\mathring{y},\mathring{t})\|<\varepsilon/2$, 且当 $\tau\to\infty$ 时有 $\widetilde{z}(\tau)\to\varphi(\mathring{y},\mathring{t})$, 亦即在某个 $\tau=\tau_0=\tau_0(\delta)>0$ 时有 $\|\widetilde{z}(\tau_0)-\varphi(\mathring{y},\mathring{t})\|<\delta$. 由此根据极限等式 (2.30) 得出, 从某个号码 n_0 开始, 使得对一切 $n\geqslant n_0$, 当 $t_n\leqslant t\leqslant t_n+\mu_n\tau_0$ 时满足不等式

$$\|z(t,\mu_n)-\varphi(y(t,\mu_n),t)\|<\varepsilon/2,\tag{2.31}$$

而当 $t=t_n+\mu_n\tau_0$ 时有

$$\|z(t_n+\mu_n\tau_0,\mu_n)-\varphi(y(t_n+\mu_n\tau_0,\mu_n),t_n+\mu_n\tau_0)\|\leqslant\delta.\tag{2.32}$$

如果 $\bar{t}_n\leqslant t_n+\mu_n\tau_0$, 那么不等式 (2.31) 与 (2.28) 矛盾; 如果 $\bar{t}_n>t_n+\mu_n\tau_0$, 那么不等式 (2.32) 与不等式 (2.29) 的左端矛盾. 得到的矛盾证明了引理 2.2. □

四、定理 2.3 的证明 假设任意给定这样的 $\varepsilon>0$, 使得 $\overline{U}_\varepsilon\subset G$. 选取由引理2.2所确定的 $\delta=\delta(\varepsilon)$, 并考虑附加方程组初值问题 (2.24), (2.25). 由于条件 V, 当 $\tau\to\infty$ 时, 它的解 $\widetilde{z}(\tau)\to\varphi(y^0,0)$, 亦即存在这样的 $\tau_0=\tau_0(\delta)>0$ 使得

$$\|\widetilde{z}(\tau_0)-\varphi(y^0,0)\|<\delta/3.\tag{2.33}$$

在原来的问题 (2.18), (2.19) 中进行变量替换 $t=\mu\tau$, 我们得到

$$\begin{aligned}&\frac{dz}{d\tau}=F(z,y,\mu\tau),\quad &&\frac{dy}{d\tau}=\mu f(z,y,\mu\tau);\\ &z|_{\tau=0}=z^0, &&y|_{\tau=0}=y^0.\end{aligned}\tag{2.34}$$

因为由条件 V 即知当 $\tau\geqslant 0$ 时有点 $(\widetilde{z}(\tau),y^0,0)\in G$, 所以根据定理2.2, 当 μ 充分小时, 问题 (2.34) 的解 $z(\tau\mu,\mu),y(\tau\mu,\mu)$ 在区间 $0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$ 上存在、唯一, 而且关于 $\tau\in[0,\tau_0]$ 一致满足极限等式

$$\lim_{\mu\to 0}z(\mu\tau,\mu)=\widetilde{z}(\tau),\quad \lim_{\mu\to 0}y(\mu\tau,\mu)=y^0.\tag{2.35}$$

亦即存在这样的 $\mu_0>0$, 使得当 $\mu\in(0,\mu_0]$ 时满足不等式

$$\|z(\mu\tau,\mu)-\widetilde{z}(\tau)\|<\delta/3,\quad 当\ \tau\in[0,\tau_0].\tag{2.36}$$

此外, 由于 $f(z,y,t)$ 的有界性, 我们可以取 μ_0 如此之小, 使得当 $\tau \in [0, \tau_0]$, $\mu \in (0, \mu_0]$ 时有 $(y(\mu\tau, \mu), \tau\mu) \in D$; 而且由 (2.35) 的第二个等式以及 $\varphi(y,t)$ 的连续性, 我们还可以取 μ_0 如此之小, 使得当 $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时有

$$\| \varphi(y(\tau_0\mu, \mu), \tau_0\mu) - \varphi(y^0, 0) \| < \frac{1}{3}\delta. \tag{2.37}$$

于是从 (2.33), (2.36) 以及 (2.37) 即得

$$\| z(\tau_0\mu, \mu) - \varphi(y(\tau_0\mu, \mu), \tau_0\mu) \| < \delta.$$

亦即问题 (2.18), (2.19) 的解 $z(t,\mu) = z(\tau\mu, \mu)$, $y(t,\mu) = y(\tau\mu, \mu)$ 当 $t = t_0 = \tau_0\mu$ 时满足

$$\big(z(t_0, \mu),\, y(t_0, \mu),\, t_0\,\big) \in U_\delta. \tag{2.38}$$

由于引理2.2, 当 μ $(0 < \mu \leqslant \mu_0 = \mu_0(\varepsilon))$ 充分小时, 解 $z(t,\mu), y(t,\mu)$ 当 $t > t_0$ 时可以唯一地进行延拓, 且只要 $(y(t,\mu), t) \in D$, 它就不会越出 U_ε, 亦即当 $t \geqslant t_0$ 时, 只要 $(y(t,\mu),t) \in D$, 对于 $z(t,\mu)$ 就有等式

$$z(t,\mu) = \varphi(y(t,\mu), t) + \gamma(t,\mu)$$

成立, 这里 $\gamma(t,\mu)$ 为满足不等式 $\| \gamma(t,\mu) \| < \varepsilon$ 的某一个连续函数, 而 $y(t,\mu)$ 为问题

$$\frac{dy}{dt} = f(\varphi(y,t) + \gamma(t,\mu), y, t), \quad y|_{t=t_0} = y(t_0, \mu) = y^0 + \sigma(\mu) \tag{2.39}$$

的解, 其中由 (2.35) 的第二个等式可知: 当 $\mu \to 0$ 时有 $\sigma(\mu) \to 0$.

现在我们注意到方程组 (2.39) 的如下我们称之为性质 A 的性质: 根据定理 2.2 由条件 III 得出, 对于任给的 $\eta > 0$, 存在这样的 $\varepsilon_0(\eta)$, 使得如果 $\gamma(t,\mu)$ 在 $t_0 \leqslant t \leqslant T_0$ 上有定义、连续, 这里 T_0 为区间 $(t_0, T]$ 的任一数值, 且当 $t \in [t_0, T_0]$ 时满足 $\| \gamma(t,\mu) \| \leqslant \varepsilon_0(\eta)$, 以及若还有 $t_0 \leqslant \varepsilon_0(\eta)$, $\| \sigma(\mu) \| \leqslant \varepsilon_0(\eta)$, 那么问题 (2.39) 的解 $y(t,\mu)$ 在区间 $[t_0, T_0]$ 上存在, 且当 $t_0 \leqslant t \leqslant T_0$ 时, 点 $(y(t,\mu), t) \in D$ 以及满足 $\| y(t,\mu) - \overline{y}(t) \| \leqslant \eta$.

我们给定任意小的 $\eta > 0$ 和区间 $(0, \varepsilon_0(\eta)]$ 中的任意小 ε, 而选取 μ_0 这样小, 使得当 $\mu \in (0, \mu_0]$ 时满足条件 (2.38) 和下列不等式:

$$t_0 = \tau_0\mu = \tau_0(\delta)\mu \leqslant \varepsilon_0(\eta), \quad \| \sigma(\mu) \| \leqslant \varepsilon_0(\eta);$$

$$\| y(t,\mu) - y^0 \| \leqslant \eta/2, \quad 当 \;\; 0 \leqslant t \leqslant t_0; \tag{2.40}$$

$$\| \overline{y}(t) - y^0 \| \leqslant \eta/2, \quad 当 \;\; 0 \leqslant t \leqslant t_0. \tag{2.41}$$

选取这样的 μ_0, 显然是可能的. 特别, 当 μ_0 充分小时, 从 (2.35) 的第二个等式推出 (2.40) 的正确性, 而 (2.41) 的正确性就从 $\overline{y}(t)$ 的连续性推出.

由 (2.40) 和 (2.41) 得出

$$\| y(t,\mu)-\overline{y}(t) \|\leqslant \eta, \quad \text{当}\ 0\leqslant t\leqslant t_0, \quad 0<\mu\leqslant\mu_0. \tag{2.42}$$

我们现在证明: 问题 (2.18), (2.19) 当 $t=t_0$ 时位于 U_δ (见 (2.38)) 的解 $z(t,\mu)$, $y(t,\mu)$, 可唯一地延拓到 $t=T$, 而且满足不等式

$$\| y(t,\mu)-\overline{y}(t) \|\leqslant \eta, \quad \text{当}\, t_0\leqslant t\leqslant T, \tag{2.43}$$

$$\| z(t,\mu)-\varphi(y(t,\mu),t) \|<\varepsilon, \quad \text{当}\, t_0\leqslant t\leqslant T. \tag{2.44}$$

事实上, 当 $t=t_0$ 时, 由于 (2.42) 和 (2.38), 不等式 (2.43) 和 (2.44) 显然成立. 当对解从点 $t=t_0$ 向右进行延拓时, 由于 $z(t,\mu),y(t,\mu),\varphi(y,t)$ 的连续性, 不等式 (2.44) 在 $t=t_0$ 右端的某个邻域 $(t_0,\,t_0+h)$ 中是正确的; 从而由方程组 (2.39) 的性质 A 即知当 $t\in(t_0,\,t_0+h)$ 时, 点 $(y(t,\mu),t)\in D$ 且满足不等式 (2.43). 如果当 $t=t_0+h$ 时有 (2.44) 成立, 那么解又可以向右进行唯一的延拓; 只要不达到 $t=T$ 或者不破坏 (2.44), 这个延拓过程总可以继续下去. 倘若在某个 $T_0\in(t_0,\,T)$ 处不等式 (2.44) 不成立, 亦即

$$\begin{cases} \| z(t,\mu)-\varphi(y(t,\mu),t) \|<\varepsilon, & \text{当}\ t_0\leqslant t<T_0, \\ \| z(T_0,\mu)-\varphi(y(T_0,\mu),T_0) \|=\varepsilon; \end{cases} \tag{2.45}$$

那么由性质 A, 当 $t\in[t_0,\,T_0]$ 时, 点 $(y(t,\mu),\,t)\in D$; 于是由引理 2.2 即知在 $t=T_0$ 处, 解位于 U_ε 的内部, 这与 (2.45) 矛盾.

总之, 解可以唯一地延拓到 $t=T$, 且不等式 (2.43), (2.44) 成立. 由 (2.42), (2.43) 得出

$$\| y(t,\mu)-\overline{y}(t) \|\leqslant \eta, \quad \text{当}\, t\in[0,\,T].$$

由于 η 可任意小, 这就证明了极限等式 (2.26). 由 (2.26) 及 $\varphi(y,t)$ 的连续性推出, 极限过程 $\lim\limits_{\mu\to0}\varphi(y(t,\mu),t)=\varphi(\overline{y}(t),t)=\overline{z}(t)$ 对 $t\in[0,\,T]$ 一致地成立.

为了证明 (2.27), 只须注意到在 (2.44) 中的 ε 可以任意小; 而当 $\mu\in(0,\,\mu_0]$ 充分小时, $t_0=\tau_0\mu$ 也可以取得任意小. 定理 2.3 证毕.

注 1. 解 $z(t,\mu),y(t,\mu)$ 对应的轨线 $L(t,\mu)$, 亦即在 (z,y,t) 空间中的积分曲线, 当 $\mu\to0$ 时趋于由两条连续曲线 L_{01} 和 L_{02} 组成的曲线 L_0, 其中 $L_{01}=\{(z,y,t)|z=\widetilde{z}(\tau),\ \tau\geqslant0;y=y^0;t=0\}$ 是直线段, 这里的 $\widetilde{z}(\tau)$ 是附加方程组 (2.24), (2.25) 的解; 而 $L_{02}=\{(z,y,t)|z=\overline{z}(t);\ y=\overline{y}(t);\ 0\leqslant t\leqslant T\}$ 是对应于退化解的曲线.

2. 对于 $y(t,\mu)$ 的极限等式 (2.26) 关于 $t\in[0,\,T]$ 是一致的, 但是这时对于 $z(t,\mu)$ 的极限等式 (2.27) 关于 $t\in[0,\,T]$ 却是不一致的, 不过它关于 $t\in[\overline{t}_0,\,T]$ 是一致的, 这里 $\overline{t}_0>0$ 可任意小、但当 $\mu\to0$ 时是固定的常数.

图 2 给出了当 μ 充分小时问题 (2.18), (2.19) 的解在性态上的直观表示.

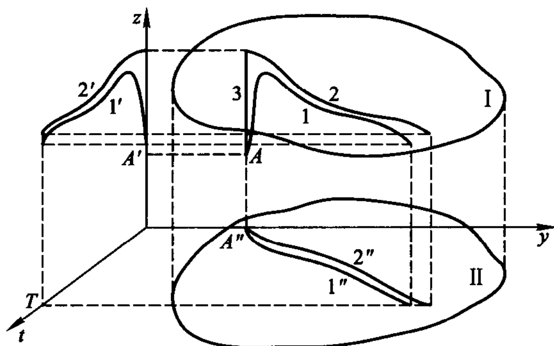


图 2　I 是曲面 $z = \varphi(y,t)$, II 是区域 $\overline{D}$, A是坐标为 $(z,y,t) = (z^0,y^0,0)$ 的初始点, A' 是坐标为 $(z,y,t) = (z^0,0,0)$ 的点, A'' 是坐标为 $(z,y,t) = (0,y^0,0)$ 的点, 1 是对应于问题 (2.18), (2.19) 的解 $z(t,\mu), y(t,\mu)$ 的曲线 $L(t,\mu)$, 1′ 是$z = z(t,\mu)$ 的图形, 1″ 是$y = y(t,\mu)$ 的图形, 2 是对应于退化解 $\overline{z}(t)$, $\overline{y}(t)$ 的曲线 L_{02}, 2′ 是$z = \overline{z}(t)$ 的图形, 2″ 是$y = \overline{y}(t)$ 的图形, 3 是曲线 L_{01}.

五、数值情况下影响域的结构　如果 z 是数值函数, 那么附加方程组 (2.24) 就是数值方程. 于是奇点 $\widetilde{z} = \varphi_i(y^0,0)$, $i = 1,2,\cdots$, 在 $(\widetilde{z}, \tau)$ 平面上就是表示一些与 τ 轴平行的直线 (见图 3). 假设 $F(\widetilde{z},y^0,0)$ 当 $\widetilde{z}$ 经过值 $\varphi_i(y^0,0)$ 时改变符号, 并设符号是如图 3 所示那样交替变化. 那么奇点 $\widetilde{z} = \varphi_2(y^0,0)$ 将是在李雅普诺夫意义下渐近稳定的. 这时不难相信, 如果取正定函数 $V = (\widetilde{z} - \varphi_2)^2$ 作为李雅普诺夫函数, 那么 $\dfrac{dV}{dt} = 2(\widetilde{z} - \varphi_2)F(\widetilde{z},y^0,0)$ 不依赖于 τ 且在区域 $\varphi_3 < \widetilde{z} < \varphi_1$ 中处处为负定函数, 从而保证了奇点 $\widetilde{z} = \varphi_2(y^0,0)$ 的渐近稳定性; 于是如果 z^0 位于区间 (φ_3, φ_1) 中, 则当 $\tau \to \infty$ 时就有 $\widetilde{z}(\tau) \to \varphi_2(y^0,0)$.

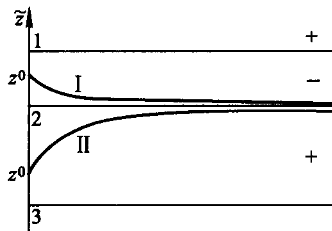


图 3　1, 2, 3 是直线 $\widetilde{z} = \varphi_i\ (y^0,0)$, $i = 1,2,3$, I 和 II 是附加方程对应于不同 z^0 值的两个解的图形.

总之, 奇点 $\widetilde{z} = \varphi_2(y^0,0)$ 是在李雅普诺夫意义下渐近稳定的, 而它的影响域就是区间 (φ_3, φ_1).

第三章　奇异摄动初值问题解对小参数的渐近展开

§8. 引论

上一章建立了表示在退化问题 (2.20), (2.21) 的解 $\overline{z}(t), \overline{y}(t)$ 与原来奇异摄动初值问题 (2.18), (2.19) 的解 $z(t,\mu), y(t,\mu)$ 之间联系的极限等式 (2.26), (2.27). 从定理 2.3 看出, $\overline{y}(t)$ 可以用来作为 $y(t,\mu)$ 在整个区间 $[0,T]$ 上具有一致精确度的渐近近似 (见 §7 第四段后面的注 2), 至于 $\overline{z}(t)$ 的情况却略有不同; 因为在点 $t=0$ 处, $z(t,\mu)$ 与 $\overline{z}(t)$ 之差的量为 $z^0-\overline{z}(0)$, 因此, 在初始点 $t=0$ 的某个邻域中, $\overline{z}(t)$ 就不能作为 $z(t,\mu)$ 的近似 (一般来说, 当 $z^0-\overline{z}(0)\neq 0$ 时, 这是成立的) . 在 $t=0$ 的这个小邻域中, $z(t,\mu)$ 从 $t=0$ 的值 z^0 到接近于 $\overline{z}(t)$ 的值发生了很快的变化; 如在第一章说过, 我们称这个小邻域为*边界层区域*. 但是无论任给的 $\overline{t}_0>0$ 多么小, 只要当 $\mu\to 0$ 时是固定的, 那么 $\overline{z}(t)$ 总可以作为 $z(t,\mu)$ 在区间 $[\overline{t}_0, T]$ 上的一致渐近近似.

然而定理 2.3 丝毫没有谈到关于这些渐近近似的精确度, 因此这里自然要提出关于这个精确度的估计问题, 并进一步提出求得在整个区间 $[0,T]$ 上既对 $y(t,\mu)$, 也对 $z(t,\mu)$ 的一致近似而且到任意精确度的问题. 在第一章 §4 中, 我们曾概括地谈到有关构造这种近似的基本思想, 这一章将详细地给出一种计算方法; 根据这种算法, 我们实现了 $z(t,\mu), y(t,\mu)$ 对 $t\in[0,T]$ 且具有精确度为 $O(\mu^{n+1})$ 的一致渐近近似的构造, 这里 n 为任意正整数; 此外, 我们还将证明这个估计的正确性. 这些结果将在 §9 ~ §11 中作出. 为了对照起见, 我们事先在这一节的第一、二段, 对正则摄动方程组和对在线性数值方程式情况下的奇摄动问题讨论了同样的问题.

一、正则摄动初值问题的解对小参数的展开式 由第一章的叙述清楚地知道，在正则摄动与奇异摄动问题的解对下小参数的渐近展开之间，存在着性质上的区别，为此我们必须进行仔细研究. 我们首先考虑正则的情形，即方程组 (1.1),

$$\frac{dx}{dt}=f(x,t,\mu), \tag{3.1}$$

并讨论它的初始问题,

$$x(0,\mu)=x^0. \tag{3.2}$$

假设函数 $f(x,t,\mu)$ 在区域

$$D=\{(x,t,\mu)|\ \| x-\overline{x}(t) \|\leqslant b,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad 0\leqslant \mu\leqslant d\} \tag{3.3}$$

上若干次连续可微，这里 $\overline{x}(t)$ 为问题

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=f(\overline{x},t,0),\quad \overline{x}(0)=x^0 \tag{3.4}$$

的解，按照假设这个解在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上存在，其中 $b>0$ 和 $d>0$ 均为常数. 函数 $f(x,t,\mu)$ 所需要的连续可微性次数与我们要求渐近近似的精度有关. 为了简单起见，不妨认为 $f(x,t,\mu)$ 在区域 (3.3) 上无穷次连续可微.

我们将寻找问题 (3.1), (3.2) 对 μ 的幂级数形式解

$$x(t,\mu)=\overline{x}_0(t)+\mu\overline{x}_1(t)+\mu^2\overline{x}_2(t)+\cdots+\mu^k\overline{x}_k(t)+\cdots. \tag{3.5}$$

下面带有这个级数的所有运算都将完全是形式地进行，对此应当把它简单看成是确定 $\overline{x}_k(t)$ 的规则. 将 (3.5) 代入 (3.1) 之后，将其右端在以点 $(\overline{x}_0(t),t,0)$ 为展开中心进行泰勒级数展开，合并 μ 的同次幂项之后即得

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\overline{x}_0(t)+\mu\overline{x}_1(t)+\cdots+\mu^k\overline{x}_k(t)+\cdots\right]=f(\overline{x}_0(t),t,0)\\&+\mu\left[\overline{f}_x(t)\overline{x}_1(t)+f_1(t)\right]+\cdots+\mu^k\left[\overline{f}_x(t)\overline{x}_k(t)+f_k(t)\right]+\cdots,\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中矩阵 $\overline{f}_x(t)=\left(\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}\right)$ 的元素及向量 $f_1(t)=\dfrac{\partial f}{\partial\mu}$ 的分量都是在点 $(\overline{x}_0(t),\,t,\,0)$ 处进行计算，而向量 $f_k(t)$ 是由 $\overline{x}_i(t),\ i=0,1,\cdots,k-1$, 按某种确定的方式表示.

比较等式 (3.6) 两边关于 μ 的同次幂系数，我们就得到确定 $\overline{x}_0(t),\overline{x}_1(t),\cdots,\overline{x}_k(t),\cdots$ 的方程

$$\frac{d\overline{x}_0}{dt}=f(\overline{x}_0,t,0), \tag{3.7}$$

$$\begin{cases}\dfrac{d\overline{x}_1}{dt}=\overline{f}_x(t)\overline{x}_1+f_1(t),\\ \qquad\vdots\\ \dfrac{d\overline{x}_k}{dt}=\overline{f}_x(t)\overline{x}_k+f_k(t),\quad k=1,2,3,\cdots.\end{cases} \tag{3.8}$$

将级数 (3.5) 代入 (3.2), 并比较等式两边 μ 的同次幂系数, 我们得到方程 (3.7), (3.8) 的初始条件

$$\overline{x}_0(0) = x^0, \tag{3.9}$$

$$\overline{x}_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \cdots. \tag{3.10}$$

显然, 用来确定 $\overline{x}_0(t)$ 的问题 (3.7), (3.8), 与问题 (3.4) 完全一样, 亦即 $\overline{x}_0(t) \equiv \overline{x}(t)$, 而关于 $\overline{x}_k(t)$, $k = 1, 2, \cdots$, 的方程组 (3.8) 均为线性方程组, 从而它们以 (3.10) 为初始条件的解在区间 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上唯一存在, 因此我们可以确定级数 (3.5) 的系数直到任意号码 n. 级数 (3.5) 一般来说是不收敛的, 但是可以证明, 它是问题 (3.1), (3.2) 的解 $x(t, \mu)$ 的渐近展开式, 即当 μ $(0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0 \leqslant d)$ 充分小时, 不等式

$$\| x(t, \mu) - \sum_{k=0}^{n} \mu^k \overline{x}_k(t) \| \leqslant c\mu^{n+1}, \quad \text{当} \, 0 \leqslant t \leqslant T,$$

是正确的, 其中 $c > 0$ 是与 $t \in [0, T]$ 和 $\mu \in [0, \mu_0]$ 无关的常数 (但一般来说是依赖于 n 的) .

为了证明这个不等式, 我们将 $x(t, \mu) = \sum\limits_{k=0}^{n} \mu^k \overline{x}_k(t)_k(t) + \Delta(t, \mu)$ 代入 (3.1), (3.2), 从而得到关于 $\Delta(t, \mu)$ 的初值问题, 我们将它写成形式

$$\frac{d\Delta}{dt} = \overline{f}_x(t)\Delta + G(\Delta, t, \mu), \quad \Delta(0, \mu) = 0;$$

其中

$$G(\Delta, t, \mu) = f(\Delta + \sum_{k=0}^{n} \mu^k \overline{x}_k(t), t, \mu) - \overline{f}_x(t)\Delta - \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{n} \mu^k \overline{x}_k(t).$$

由此利用逐次逼近法, 不难得到所需要的估计

$$\| \Delta(t, \mu) \| \leqslant c\mu^{n+1}.$$

我们不在这里进行详细的证明, 因为下面在证明定理 3.1 的余项估计时, 逐次逼近法的类似特性将得到详细地讨论.

二、奇异摄动初值问题的线性例子 正如在第一章指出过那样, 关于奇摄动初值问题的解对小参数的渐近展开式, 要比在正则摄动情况下的级数 (3.5) 有更复杂的形式. 我们以数值一阶线性方程式的奇摄动问题

$$\mu \frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t); \quad x(0, \mu) = x^0 \quad t \in [0, T] \tag{3.11}$$

作为例子来彻底研究这个问题. 为了简单起见, 我们在此假设函数 $a(t)$ 和 $b(t)$ 对 $0 \leqslant t \leqslant T$ 无穷次连续可微, 且有 $a(t) \neq 0$. 问题 (3.11) 的精确解为

$$x(t, \mu) = x^0 \exp\left(\frac{1}{\mu}\int_0^t a(s)ds\right) + \int_0^t \frac{1}{\mu} b(s) \exp\left(\frac{1}{\mu}\int_s^t a(\xi)d\xi\right) ds.$$

将右端第二项进行分部积分之后, 由此容易得到 $x(t,\mu)$ 对小参数 μ 的渐近展开式. 这就给出

$$x(t,\mu) = x^0 \exp\left(\frac{1}{\mu}\int_0^t a(s)ds\right) - \frac{b(t)}{a(t)} + \frac{b(0)}{a(0)}\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_0^t a(s)d\right)$$

$$+\int_0^t \left[\frac{b(s)}{a(s)}\right]' \exp\left(\frac{1}{\mu}\int_s^t a(\xi)d\xi\right)ds$$

$$= \left[-\frac{b(t)}{a(t)}\right] + \left[x^0 + \frac{b(0)}{a(0)}\right]\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_0^t a(s)ds\right)$$

$$+\int_0^t \left[\frac{b(s)}{a(s)}\right]' \exp\left(\frac{1}{\mu}\int_s^t a(\xi)d\xi\right)ds,$$

(撇号表示对 t 求导) . 再一次分部积分就有

$$x(t,\mu) = \left[-\frac{b(t)}{a(t)} - \mu\frac{1}{a(t)}\left(\frac{b(t)}{a(t)}\right)'\right]$$

$$+\left[x^0 + \frac{b(0)}{a(0)} + \mu\frac{1}{a(0)}\left(\frac{b}{a}\right)'_{t=0}\right]\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_0^t a(s)ds\right) \tag{3.12}$$

$$+\mu\int_0^t \left[\left(\frac{1}{a(s)}\left(\frac{b(s)}{a(s)}\right)'\right)'\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_s^t a(\xi)d\xi\right)\right]ds.$$

继续采用这样的方法进行分部积分, 可得解 $x(t,\mu)$ 的形式级数展开, 它是由两种类型的项组成: 纯粹 μ 的幂次项

$$\left[-\frac{b(t)}{a(t)} - \mu\frac{1}{a(t)}\left(\frac{b(t)}{a(t)}\right)' + \cdots\right]; \tag{3.13}$$

以及除了 μ 的幂次项外, 还含有如下指数因子的项

$$\left[x^0 + \frac{b(0)}{a(0)} + \mu\frac{1}{a(0)}\left(\frac{b}{a}\right)'_{t=0} + \cdots\right]\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_0^t a(s)ds\right). \tag{3.14}$$

这时我们注意到, 级数 (3.13) 也可以用别的办法得到, 例如用类似于在正则摄动情况下构造级数 (3.5) 的方法得到; 为此我们用级数

$$\overline{x}_0(t) + \mu\overline{x}_1(t) + \cdots + \mu^k\overline{x}_k(t) + \cdots \tag{3.15}$$

代替 (3.11) 中的 x, 并比较等式

$$\mu\frac{d}{dt}\left(\overline{x}_0+\mu\overline{x}_1+\cdots+\mu^k\overline{x}_k+\cdots\right)=a(t)\left(\overline{x}_0+\mu\overline{x}_1+\cdots+\mu^k\overline{x}_k+\cdots\right)+b(t)$$

两端关于 μ 同次幂的系数即得

$$0=a(t)\overline{x}_0+b(t),\quad \frac{d\overline{x}_{k-1}}{dt}=a(t)\overline{x}_k,\quad k=1,2,\cdots$$

(显然, 这些方程中的第一个就是对应于 (3.11) 的退化方程), 由此推出

$$\overline{x}_0(t)=-\frac{b(t)}{a(t)},\quad \overline{x}_1(t)=-\frac{1}{a(t)}\left(\frac{b(t)}{a(t)}\right)',\quad \cdots;$$

这与 (3.13) 完全一样. 因此在问题 (3.11) 的解 $x(t,\mu)$ 的展开式中, 存在着类似于正则摄动解的级数展开 (3.5) 的部分. 但是不难看出, 这部分的项并不满足级数 (3.5) 的项所满足的定解条件, 因为一般来说, $\overline{x}_0(0)\neq x^0$, $\overline{x}_k(0)\neq 0$, $k=1,2,\cdots$; 亦即, 只有 (3.13) 形式的项, 至少在 $t=0$ 附近, 不给出解 $x(t,\mu)$ 的近似.

但是在 $x(t,\mu)$ 的展开式里还有第二部分, 即级数 (3.14). 我们假设 $a(t)<0$, 这是为了使得辅助系统 (在我们的例子中, 这是一个方程式)

$$\frac{d\widetilde{x}}{d\tau}=-a(t)\widetilde{x}+b(t)$$

的奇点 $\widetilde{x}=-\dfrac{b(t)}{a(t)}$ 是渐近稳定的 (见定理 2.3 的条件 IV) . 于是级数 (3.14) 的项将随 t 的增大而很快地趋于零, 可是在 $t=0$ 附近却不会很小. 我们看到, 对于正则摄动系统的展开式 (3.5), 并不含有这样的项.

在指数因子 $\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_0^t a(s)ds\right)$ 中进行变量替换 $t=\mu\tau$, $s=\xi\mu$ 之后, 可得

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_0^t a(s)ds\right)&=\exp\left(\int_0^\tau a(\mu\xi)d\xi\right)\\&=\exp\left(\int_0^\tau\left[a(0)+\mu a'(0)\xi+\frac{1}{2}\mu^2a''(0)\xi^2+\cdots\right]d\xi\right)\\&=\exp\left(a(0)\tau+\mu a'(0)\frac{\tau^2}{2}+\mu^3a''(0)\frac{\tau^3}{6}+\cdots\right)\\&=\exp\left(a(0)\tau\right)\Big\{1+\left[\mu a'(0)\frac{\tau^2}{2}+\mu^2a''(0)\frac{\tau^3}{6}+\cdots\right]\\&\qquad+\frac{1}{2}\left[\mu a'(0)\frac{\tau^2}{2}+\mu^2a''(0)\frac{\tau^3}{6}+\cdots\right]^2+\cdots\Big\}.\end{aligned}$$

由此得出, 级数 (3.14) 可以表示成其系数与 $\tau(\tau=\dfrac{t}{\mu})$ 有关的 μ 的幂级数, 对于这样的幂级数, 在利用第一章 §4 的记号之后 (见 (1.26)) 即为

$$\Pi_0(\tau)+\mu\Pi_1(\tau)+\cdots+\mu^k\Pi_k(\tau)+\cdots.\tag{3.16}$$

在这个例子中有

$$\Pi_0(\tau) = \left[x^0 + \frac{b(0)}{a(0)}\right] \exp\left(a(0)\tau\right),$$
$$\Pi_1(\tau) = \left[\left(x^0 + \frac{b(0)}{a(0)}\right) a'(0)\frac{\tau^2}{2} + \frac{1}{a(0)}\left(\frac{b}{a}\right)'_{t=0}\right] \exp\left(a(0)\tau\right), \quad \cdots.$$

不难验证, 边界项 (或者边界函数) $\Pi_k(\tau)$ 具有在 §4 中指出的所有性质. 由于 $a(0) < 0$, 当 $\tau \to \infty$ 时, 这些项都指数式地趋于零. 其次, 合并 (3.13) 和 (3.16) 即可看出, μ 的同次幂系数已经满足如正则摄动情况中当 $t = 0$ 时那样的初始条件. 实际上,

$$\left[\bar{x}_0(t) + \Pi_0(\tau)\right]_{t=0} = \left\{ -\frac{b(t)}{a(t)} + \left[x^0 + \frac{b(0)}{a(0)}\right] \exp\left(a(0)\tau\right) \right\}_{t=0} = x^0,$$
$$\left[\bar{x}_1(t) + \Pi_1(\tau)\right]_{t=0} = \left\{ -\frac{1}{a(t)}\left(\frac{b(t)}{a(t)}\right)' + \left[\left(x^0 + \frac{b(0)}{a(0)}\right) a'(0)\frac{\tau^2}{2} + \frac{1}{a(0)}\left(\frac{b}{a}\right)'\right] \exp\left(a(0)\tau\right) \right\}_{t=0} = 0,$$

等等, 亦即边界项 (3.16) 对不满足初始条件的级数项 (3.13) 进行了校正. 在寻找问题 (3.11) 形如级数 (3.15) 的解时, 这种不满足初始条件的现象是必然要出现的, 因为确定这个级数的系数并不需要任何定解条件.

从 (3.12) 得出, 退化解 $\bar{x}_0(t) = -\dfrac{b(t)}{a(t)}$ 与级数 (3.14) 的头一项

$$\left(x^0 + \frac{b(0)}{a(0)}\right) \exp\left(\frac{1}{\mu}\int_0^t a(s)ds\right)$$

一起就已给出了解 $x(t,\mu)$ 关于 $t \in [0, T]$ 且 (具有一致渐近) 精确度为 $O(\mu)$ 阶的一致近似. 由于显然,

$$\Pi_0(\tau) \quad 与 \quad \left(x^0 + \frac{b(0)}{a(0)}\right) \exp\left(\frac{1}{\mu}\int_0^t a(s)ds\right)$$

只在 μ 阶量上的不同, 因此 $\left[\bar{x}_0(t) + \Pi_0(\tau)\right]$ 也给出解 $x(t,\mu)$ 具有 $O(\mu)$ 精确度的一致渐近近似. 其次不难验证, 如果在 (3.13) 和 (3.16) 中不仅取头一项, 而且取到 n 阶项的部分和, 那么可得到具有 μ^{n+1} 阶精确度的一致渐近解.

总之, 问题 (3.11) 解 $x(t,\mu)$ 的渐近展开式是由其系数分别依赖于 t 和 τ 的两个 μ 的幂级数所组成:

$$x(t,\mu) = \bar{x}_0(t) + \mu\bar{x}_1(t) + \cdots + \Pi_0(\tau) + \mu\Pi_1(\tau) + \cdots, \tag{3.17}$$

这就证实了在第一章中提出的关于级数 (1.26) 的结论.

§9. 在一般情况下构造奇异摄动初值问题解的渐近展开式算法

一、补充要求 我们重新回到在第二章中研究过的奇异摄动初值问题

$$\mu\frac{dz}{dt}=F(z,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,y,t); \tag{3.18}$$

$$z(0,\mu)=z^0,\qquad y(0,\mu)=y^0. \tag{3.19}$$

与前面一样, 这里 z,F 和 y,f 分别为 M 维和 m 维向量函数.

为了构造问题 (3.18), (3.19) 的渐近解, 我们需要比在定理 2.3 中给出的更强条件.

I. 我们假设在区域 G 中, 函数 $F(z,y,t)$ 和 $f(z,y,t)$ 具有足够次数的连续可微性 (在下一节的第一段中将确切地给出所需要的连续可微性次数).

定理 2.3 中的条件 II, III, V 仍然不变, 且在此重新把它们记作 II, III, V.

定理 2.3 中的条件 IV, 即关于附加方程组

$$\frac{d\widetilde{z}}{d\tau}=F(\widetilde{z},y,t);\quad y,t\,\text{为参数},$$

的孤立奇点 $\widetilde{z}=\varphi(y,t)$ 必须是对 $(y,t)\in\overline{D}$ 一致渐近稳定的假设, 由于在构造渐近解时, 需要有能够保证渐近稳定性的具体条件, 亦即一次近似的稳定性条件. 为此我们用 $\lambda_i(y,t)$, $i=1,2,\cdots,M$, 表示矩阵 $F_z(\phi(y,t),y,t)=\left(\dfrac{\partial F^i}{\partial z^j}\right)_{z=\phi(y,t)}$ 的特征值, 而以 $\overline{\lambda}_i(t)$ 表示矩阵 $\overline{F}_z(t)\equiv F_z(\varphi(\overline{y}(t),t),\overline{y}(t),t)$ 的特征值, 亦即 $\overline{\lambda}_i(t)=\lambda_i(\overline{y}(t),t)$, 这里 $\overline{y}(t),\overline{z}(t)=\varphi(\overline{y}(t),t)$ 是退化问题

$$0=F(\overline{z},\overline{y},t),\quad \frac{d\overline{y}}{dt}=f(\overline{z},\overline{y},t)\quad \overline{y}(0)=y^0 \tag{3.20}$$

的解, 而 $\overline{\lambda}_i(t)$ 就是从特征方程

$$\det(\overline{F}_z(t)-\lambda E_M)=0 \tag{3.21}$$

求出的根 (今后 E_M 均表示 $M\times M$ 阶单位矩阵) .

IV. 假设对 $t\in[0,T]$ 有

$$\mathrm{Re}\overline{\lambda}_i(t)<0,\quad i=1,2,\cdots,M; \tag{3.22}$$

并称 (3.22) 为稳定性条件.

当满足这个条件时, 由于 $F_z(\varphi(y,t),y,t)$ 的连续性, 从而保证了 $\lambda_i(y,t)$ 的连续性, 因此存在区域 $\overline{D}_1=\{(y,t):\|y-\overline{y}(t)\|\leqslant\eta,\ \eta>0\,\text{为常数};\ 0\leqslant t\leqslant T\}\subseteq\overline{D}$; 使得对 $(y,t)\in\overline{D}_1$ 有

$$\mathrm{Re}\lambda_i(y,t)<-\alpha<0,\quad i=1,2,\cdots,M \tag{3.23}$$

($\alpha > 0$ 为某一常数)．由此可以推出, $\widetilde{z} = \varphi(y,t)$ 是附加方程组关于 $\overline{D}_1$ 一致的渐近稳定奇点 (亦即满足定理 2.3 的条件 IV)．在 §10 节第三段的注 3 将给出这个结论的证明.

二、构造问题 (3.18), (3.19) 渐近解的算法 我们来寻找问题 (3.18), (3.19) 形式为

$$x(t,\mu) = \overline{x}(t,\mu) + \Pi x(\tau,\mu), \quad \tau = \frac{t}{\mu}, \tag{3.24}$$

的解的渐近展开式 (与 (3.17) 比较), 其中

$$\overline{x}(t,\mu) = \overline{x}_0(t) + \mu\overline{x}_1(t) + \cdots + \mu^k\overline{x}_k(t) + \cdots, \tag{3.25}$$

$$\Pi x(\tau,\mu) = \Pi_0 x(\tau) + \mu\Pi_1 x(\tau) + \cdots + \mu^k\Pi_k x(\tau) + \cdots; \tag{3.26}$$

今后, x 总是表示 z 和 y 的总体, 亦即如果对 x 写出某些关系式, 那么就意味着对 z 和 y 两者来说, 这些关系式也完全一样成立. 此外, 不同于 (3.17), 我们把边界函数记作 $\Pi_k x(\tau)$ (而不是像在 (3.17) 那样记作 $\Pi_k(\tau)$)；因此记号 Π 一般是用来表示只在初始点的小邻域内存在、而随着 τ 的增大迅速趋于零的各种不同函数: $\Pi_k z, \Pi_k y$ (以及下面出现的 $\Pi_k F, \Pi_k f$ 等)．对于每一个 k, 记号 Π_k 可以看成某一个算子, 它对于任意一组函数 (x, F, f) 的作用是按照即将在本段阐明的一种十分确定的规则进行的.

把 (3.24) 代入 (3.18), 且为了对称起见, 将第二组方程也乘以 μ 即得

$$\begin{cases} \mu\dfrac{d\overline{z}}{dt} + \dfrac{d\Pi z}{d\tau} = F(\overline{z} + \Pi z, \overline{y} + \Pi y, t), \\ \mu\dfrac{d\overline{y}}{dt} + \dfrac{d\Pi y}{d\tau} = \mu f(\overline{z} + \Pi z, \overline{y} + \Pi y, t). \end{cases} \tag{3.27}$$

我们总可以把 (3.27) 的右端转换成与 (3.24) 右端相似的形式; 为此我们对 F 写出这个转换 (对于 f 也完全一样做出)：

$$F(\overline{z} + \Pi z, \overline{y} + \Pi y, t) = F(\overline{z}(t,\mu), \overline{y}(t,\mu), t) +$$
$$[F(\overline{z}(\mu\tau,\mu) + \Pi z(\tau,\mu), \overline{y}(\mu\tau,\mu) + \Pi y(\tau,\mu), \mu\tau) - F(\overline{z}(\mu\tau,\mu), \overline{y}(\mu\tau,\mu), \mu\tau)]$$
$$\equiv \overline{F} + \Pi F.$$

将 $\overline{x}$ 和 Πx 的展开式 (3.25) 和 (3.26) 代入上式, 然后进一步把 $\overline{F}$ 和 ΠF 展开成 μ 的幂级数形式:

$$\begin{aligned} \overline{F} &\equiv F(\overline{z}(t,\mu), \overline{y}(t,\mu), t) \\ &= F(\overline{z}_0(t) + \mu\overline{z}_1(t) + \mu^2\overline{z}_2(t) + \cdots, \overline{y}_0(t) + \mu\overline{y}_1(t) + \mu^2\overline{y}_2(t) + \cdots, t) \\ &= F(\overline{z}_0(t), \overline{y}_0(t), t) + \mu[\overline{F}_z(t)\overline{z}_1(t) + \overline{F}_y(t)\overline{y}_1(t) + F_1(t)] + \cdots \\ &\quad + \mu^k[\overline{F}_z(t)\overline{z}_k(t) + \overline{F}_y(t)\overline{y}_k(t) + F_k(t)] + \cdots \\ &\equiv \overline{F}_0 + \mu\overline{F}_1 + \cdots + \mu^k\overline{F}_k + \cdots, \end{aligned} \tag{3.28}$$

其中矩阵 $\overline{F}_z(t) = \left(\dfrac{\partial F^i}{\partial z^j}\right)$ 和 $\overline{F}_y(t) = \left(\dfrac{\partial F^i}{\partial y^j}\right)$ 的元素是在点 $(\overline{z}_0(t), \overline{y}_0(t), t)$ 处进行计算, 而向量 $F_k(t)$ 是用 $\overline{z}_i(t), \overline{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \cdots, k-1$, 按确定的方法表示的.

$$\begin{aligned}
\Pi F &\equiv F(\overline{z}(\mu\tau,\mu) + \Pi z(\tau,\mu),\, \overline{y}(\mu\tau,\mu) + \Pi y(\tau,\mu),\, \mu\tau) - F(\overline{z}(\mu\tau,\mu),\, \overline{y}(\mu\tau,\mu),\, \mu\tau)\\
&= F(\overline{z}_0(\mu\tau) + \mu\overline{z}_1(\mu\tau) + \mu^2\overline{z}_2(\mu\tau) + \cdots + \Pi_0 z(\tau) + \mu\Pi_1 z(\tau) + \mu^2\Pi_2 z(\tau) + \cdots,\\
&\qquad \overline{y}_0(\mu\tau) + \mu\overline{y}_1(\mu\tau) + \mu^2\overline{y}_2(\mu\tau) + \cdots + \Pi_0 y(\tau) + \mu\Pi_1 y(\tau) + \mu^2\Pi_2 y(\tau) + \cdots,\, \mu\tau)\\
&\qquad - F(\overline{z}_0(\mu\tau) + \mu\overline{z}_1(\mu\tau) + \mu^2\overline{z}_2(\mu\tau) + \cdots, \overline{y}_0(\mu\tau) + \mu\overline{y}_1(\mu\tau) + \mu^2\overline{y}_2(\mu\tau) + \cdots, \mu\tau)\\
&= \left[F(\overline{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau),\, \overline{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau),\, 0) - F(\overline{z}_0(0),\, \overline{y}_0(0),\, 0)\right]\\
&\qquad + \mu\left[F_z(\tau)\Pi_1 z(\tau) + F_y(\tau)\Pi_1 y(\tau) + G_1(\tau)\right] + \cdots\\
&\qquad + \mu^k\left[F_z(\tau)\Pi_k z(\tau) + F_y(\tau)\Pi_k y(\tau) + G_k(\tau)\right] + \cdots\\
&\equiv \Pi_0 F + \mu\Pi_1 F + \cdots + \mu^k\Pi_k F + \cdots,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

其中矩阵 $F_z(\tau)$ 和 $F_y(\tau)$ 的元素是在点 $(\overline{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau), \overline{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0)$ 处进行计算的, 而向量 $G_k(\tau)$ 是用 $\Pi_i x(\tau)$, $i = 0, 1, \cdots, k-1$, 按确定的方法表示的.

对于函数 $f(z, y, t)$ 同样的展开式也成立. (3.29) 中最后的等式实际上就是算子 Π_k, $k = 0, 1, 2, \cdots$, 的定义.

现在将 $F = \overline{F} + \Pi F$ 和 $f = \overline{f} + \Pi f$ 代入 (3.27) 即得

$$\mu\frac{d\overline{z}}{dt} + \frac{d\Pi z}{d\tau} = \overline{F} + \Pi F, \quad \mu\frac{d\overline{y}}{dt} + \frac{d\Pi y}{d\tau} = \mu\overline{f} + \mu\Pi f; \tag{3.30}$$

用展开式 (3.25), (3.26) 代替上式左端的 $\overline{z}, \overline{y}, \Pi z, \Pi y$, 而右端用展开式 (3.28), (3.29) 以及 $\overline{f}$ 和 Πf 用同样的展开式代替; 然后令 μ 的同次幂系数相等, 并且把与 t 有关的项和与 τ 有关的项分开, 即可得到确定展开式 (3.25), (3.26) 各项系数的方程.

对于零次近似 (亦即 $\overline{x}_0(t), \Pi_0 x(\tau)$) 我们有

$$0 = \overline{F}_0 \equiv F(\overline{z}_0, \overline{y}_0, t), \quad \frac{d\overline{y}_0}{dt} = \overline{f}_0 \equiv f(\overline{z}_0, \overline{y}_0, t). \tag{3.31}$$

显然, 方程组 (3.30) 与 (3.20) 的退化方程组完全一致. 此外, 我们还有

$$\begin{cases}
\dfrac{d\Pi_0 z}{d\tau} = \Pi_0 F \equiv F(\overline{z}_0(0) + \Pi_0 z,\, \overline{y}_0(0) + \Pi_0 y,\, 0) - F(\overline{z}_0(0),\, \overline{y}_0(0),\, 0)\\
\qquad\quad = F(\overline{z}_0(0) + \Pi_0 z,\, \overline{y}_0(0) + \Pi_0 y,\, 0),\\
\dfrac{d\Pi_0 y}{d\tau} = 0.
\end{cases} \tag{3.32}$$

(由于 (3.31) 有 $F(\overline{z}_0(0), \overline{y}_0(0), 0) = 0$).

对于展开式 (3.25), (3.26) 中带有下标 1 的项, 可得方程组

$$\begin{cases}
\dfrac{d\overline{z}_0}{dt}(t) = \overline{F}_1 \equiv \overline{F}_z(t)\overline{z}_1 + \overline{F}_y(t)\overline{y}_1,\\
\dfrac{d\overline{y}_1}{dt} = \overline{f}_1 \equiv \overline{f}_z(t)\overline{z}_1 + \overline{f}_y(t)\overline{y}_1;
\end{cases} \tag{3.33}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_1 z}{d\tau} = \Pi_1 F \equiv F_z(\tau)\Pi_1 z + F_y(\tau)\Pi_1 y + G_1(\tau), \\ \dfrac{d\Pi_1 y}{d\tau} = \Pi_0 f \equiv f(\overline{z}_0(0) + \Pi_0 z, \overline{y}_0(0) + \Pi_0 y, 0) \\ \qquad\qquad -f(\overline{z}_0(0), \overline{y}_0(0), 0); \end{cases} \tag{3.34}$$

其中

$$G_1(\tau) = [F_z(\tau) - \overline{F}_z(0)][\overline{z}_0'(0)\tau + \overline{z}_1(0)] + [F_y(\tau) - \overline{F}_y(0)] \\ \times [\overline{y}_0'(0)\tau + \overline{y}_1(0)] + [F_t(\tau) - \overline{F}_t(0)]\tau. \tag{3.35}$$

一般来说, 对于展开式中下标为 k, $k = 1, 2, \cdots$, 的项可得方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{z}_{k-1}}{dt}(t) = \overline{F}_k \equiv \overline{F}_z(t)\overline{z}_k + \overline{F}_y(t)\overline{y}_k + F_k(t), \\ \dfrac{d\overline{y}_k}{dt} = \overline{f}_k \equiv \overline{f}_z(t)\overline{z}_k + \overline{f}_y(t)\overline{y}_k + f_k(t); \end{cases} \tag{3.36}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_k z}{d\tau} = \Pi_k F \equiv F_z(\tau)\Pi_k z + F_y(\tau)\Pi_k y + G_k(\tau), \\ \dfrac{d\Pi_k y}{d\tau} = \Pi_{k-1} f; \end{cases} \tag{3.37}$$

这里的 $f_k(t)$ 与 $F_k(t)$ 类似, 也是用 $\overline{z}_i(t), \overline{y}_i(t)$, $i = 0, 1, \cdots, k-1$, 按确定的方法表示的. $\Pi_{k-1} f$ 是 Πf 类似于 ΠF 在 (3.29) 的展开式中用 $\Pi_i z, \Pi_i y$, $i = 0, 1, \cdots, k-1$, 表示的 μ^{k-1} 的系数.

为了从所得到的方程组中求出展开式 (3.25), (3.26) 的项, 还需要给出初始条件. 为此, 将 (3.24) 代入原来的初始条件 (3.19) 之后得到

$$\begin{cases} \overline{z}_0(0) + \mu\overline{z}_1(0) + \cdots + \Pi_0 z(0) + \mu\Pi_1 z(0) + \cdots = z^0, \\ \overline{y}_0(0) + \mu\overline{y}_1(0) + \cdots + \Pi_0 y(0) + \mu\Pi_1 y(0) + \cdots = y^0; \end{cases} \tag{3.38}$$

令 (3.38) 两边中 μ 的同次幂系数相等, 于是对于零次近似得到

$$\overline{z}_0(0) + \Pi_0 z(0) = z^0, \quad \overline{y}_0(0) + \Pi_0 y(0) = y^0; \tag{3.39}$$

由于 $\overline{z}_0(t), \overline{y}_0(t)$ 是方程组 (3.31) 的解, 因此对 $\overline{z}_0(t)$ 不需要再加上定解条件, 而对 $\overline{y}_0(t)$ 自然是像在退化问题 (3.20) 中那样给出初始条件, 亦即

$$\overline{y}_0(0) = y^0. \tag{3.40}$$

于是问题 (3.31), (3.40) 的解 $\overline{z}_0(t), \overline{y}_0(t)$ 就与出现在关于极限过程的定理 2.3 中的退化解 $\overline{z}(t) = \varphi(\overline{y}(t), t), \overline{y}(t)$ 完全一致. 因此退化解就是级数 (3.25) 的主项, 这也与在 §8 中讨论过的线性例子完全一致.

由 (3.39) 并考虑到 (3.40), 即得方程组 (3.32) 的初始条件为

$$\Pi_0 y(0) = 0; \tag{3.41}$$

$$\Pi_0 z(0) = z^0 - \overline{z}_0(0). \tag{3.42}$$

于是 (3.32) 的第二组方程在初始条件 (3.41) 之下的解为

$$\Pi_0 y(\tau) \equiv 0 \quad 对\ \tau \geqslant 0.$$

因此根据 (3.40), 对于 $\Pi_0 z$ 我们得到方程组

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau} = F(\overline{z}_0(0) + \Pi_0 z, y^0, 0), \tag{3.43}$$

其中 $\overline{z}(0) = \varphi(y^0, 0)$. 不难看出, 方程组 (3.43) 可以从附加方程组 $\dfrac{d\widetilde{z}}{d\tau} = F(\widetilde{z}, y^0, 0)$ 经代换 $\widetilde{z} = \overline{z}_0(0) + \Pi_0 z$ 得到. 因此点 $\Pi_0 z = 0$ 就是方程组 (3.43) 的奇点. 由稳定性条件 (3.22) 即知奇点 $\Pi_0 z = 0$ 是渐近稳定的. 又因为从条件 V 知道, 初始值 $\Pi_0 z(0) = z^0 - \overline{z}_0(0)$ 是属于这个奇点的影响域, 所以有

$$\Pi_0 z(\tau) \to 0, \quad 当\ \tau \to \infty.$$

关于当 $\tau \to \infty$ 时 $\Pi_0 z(\tau)$ 趋于零的更精确估计将在 §10 中得到; 因此, 零次近似就完全确定了.

在 (3.38) 中, 令 μ 的一次幂系数相等, 我们即得

$$\overline{z}_1(0) + \Pi_1 z(0) = 0, \quad \overline{y}_1(0) + \Pi_1 y(0) = 0. \tag{3.44}$$

我们考虑 (3.44) 中的第二个等式, 如果没有任何补充的假设, 那么只从这个等式是不能确定初始值 $\overline{y}_1(0)$ 和 $\Pi_1 y(0)$ 的. 这样的补充假设就是当 $\tau \to \infty$ 时, 边界函数应趋于零的条件 (我们注意到利用这个在定理 2. 3 没有引用过的条件, 就可以从 (3.39) 确定零次近似的初始值) .

由 (3.34) 的第二组方程我们有

$$\Pi_1 y(\tau) = \Pi_1 y(0) + \int_0^\tau \Pi_0 f(s) ds;$$

由此根据当 $\tau \to \infty$ 时有 $\Pi_1 y(\tau) \to 0$ 的条件, 即得

$$\Pi_1 y(0) = -\int_0^\infty \Pi_0 f(s) ds. \tag{3.45}$$

(关于这个反常积分, 以及在下面出现的类似积分的收敛性, 将在 §10 中证明) . 最后, 对于 $\Pi_1 y(\tau)$ 得到表达式

$$\Pi_1 y(\tau) = -\int_\tau^\infty \Pi_0 f(s) ds. \tag{3.46}$$

而这时从 (3.44) 的第二个等式得出

$$\overline{y}_1(0) = \int_0^\infty \Pi_0 f(s)ds. \tag{3.47}$$

下面我们转到方程组 (3.33); 为了对它进行求解, 需要从第一组方程中解出 $\overline{z}_1(t)$, 而这是可能的, 因为根据条件 $\mathrm{Re}\overline{\lambda}_i(t) < 0$ (见 (3.22)) 即知 $\det \overline{F}_z \neq 0$. 将得到的 $\overline{z}_1(t)$ 表达式代入第二组方程, 并求解具有初始条件 (3.47) 的关于 $\overline{y}_1(t)$ 的线性微分方程组, 从而求出 $\overline{z}_1(t), \overline{y}_1(t)$. 而由 (3.44) 的第一个等式即得

$$\Pi_1 z(0) = -\overline{z}_1(0). \tag{3.48}$$

为了求出 $\Pi_1 z(\tau)$, 由于 $\Pi_1 y(\tau)$ 已经求出 (见 (3.46)), 现在只需求解具有初始条件 (3.48) 的 (3.34) 第一组方程就可以了. 这就确定了展开式 (3.25), (3.26) 中所有下标为 1 的项.

利用定解条件

$$\Pi_k y(\tau) \to 0, \quad 当 \tau \to \infty,$$

$$\overline{y}_k(0) = \int_0^\infty \Pi_{k-1} f(s)ds, \tag{3.49}$$

$$\Pi_k z(0) = -\overline{z}_k(0) \tag{3.50}$$

可以从方程组 (3.36), (3.37) 完全类似地确定 $\Pi_k y(\tau), \overline{y}_k(t), \overline{z}_k(t), \Pi_k z(\tau), k = 2, 3, \cdots$. 因此, 初值问题解的形式展开式 (3.24), (3.25), (3.26) 就构造出来了.

§10. 余项估计

1. 定理 3.1 的叙述 现在我们确切地叙述条件 I 中有关函数 $F(z,y,t), f(z,y,t)$ 的连续可微性阶数. 我们记得在第二章中曾经用 L_0 表示 (z,y,t) 空间中的这样曲线, 它是原来问题解 $z(t,\mu), y(t,\mu)$ 确定的轨线 $L(t,\mu)$ 当 $\mu \to 0$ 时所趋向的极限曲线 (见定理 2.3 的注 1) . 所谓曲线 L_0 的 ε-管是指空间 (z,y,t) 中所有与 L_0 的距离 (在 §6 中所引进范数的意义下) 不超过 ε 的点集. 显然, 存在着充分小的 $\varepsilon > 0$, 使得当 $\delta < \varepsilon$ 时, 曲线 L_0 的 δ-管整个地含于在定理 2.3 和条件 I 中出现的区域 G 中. 下面仍然用 I 记经过确切叙述的条件 I .

I. *假设函数 $F(z,y,t)$ 和 $f(z,y,t)$ 在曲线 L_0 的某个 δ-管中, 对它的所有变量具有直到包括 $(n+2)$ 阶*[①] **在内的连续偏导数**.

在这个条件下, 我们考虑展开式 (3.25), (3.26) 中直到包括下标 n 在内的项, 并用 $X_n(t,\mu)$ 表示展开式 (3.24) 的 n 阶部分和:

$$X_n(t,\mu) = \sum_{k=0}^{n} \mu^k \big[\overline{x}_k(t) + \Pi_k x(\tau)\big]. \tag{3.51}$$

---

①这个有关 F 和 f 光滑性的条件可以稍微放松.

定理 3.1 (Vasil'eva) 当满足条件 I ~ V 时, 必存在常数 $\mu_0 > 0$ 和 $c > 0$, 使得当 $\mu \in (0, \mu_0]$ 时, 问题 (3.18), (3.19) 的解 $z(t,\mu), y(t,\mu)$ 在区间 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上存在、唯一且满足不等式

$$\| x(t,\mu) - X_n(t,\mu) \| \leqslant c\mu^{n+1}, \quad \text{当 } t \in [0, T]. \tag{3.52}$$

注 由定理2.3即可得出解得存在性和唯一性; 但是从估计式 (3.52) 的证明中, 我们不依靠定理2.3而顺便地再一次证明了解的存在性和唯一性.

定理3.1的证明将在本节的第四段进行. 在第二段给出线性微分方程组和积分方程组某些结果的预备知识, 而在第三段证明边界函数指数式减小的估计.

2. 微分和积分方程组解的向量–矩阵形式记法 假设 $A = (a_{ij})$ 为 $l \times m$ 阶矩阵. 根据在 §6 中给出的向量范数的定义 ($\| x \| = \max_i |x^i|$), 我们用等式

$$\| A \| = \max_{1 \leqslant i \leqslant l} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|$$

来定义**矩阵的范数** (例如参看 [12]). 于是对任意 m 维向量 x, y 和 $l \times m$ 阶矩阵 A, B, 有下列关系式成立:

$$\begin{aligned}
&\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|; \quad && \| A + B \| \leqslant \| A \| + \| B \|; \\
&\| Ax \| \leqslant \| A \| \| x \|; && \| AB \| \leqslant \| A \| \| B \|; \\
&\| cx \| = |c| \, \| x \|; && \| cA \| = |c| \, \| A \|;
\end{aligned}$$

其中 c 为常数. 如果 $A = A(t) = (a_{ij}(t))$, 那么 $A'(t) = (a'_{ij}(t))$ 为矩阵 $A(t)$ 的**导数**, $\int_a^b A(t)dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)dt\right)$ 为矩阵 $A(t)$ 的**积分**. 不难看出, 当 $a < b$ 时有 $\| \int_a^b A(t)dt \| \leqslant \int_a^b \| A(t) \| dt$.

考虑线性齐次微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \geqslant 0, \tag{3.53}$$

其中 x 为 l 维向量函数, 而 $A(t)$ 为在 $[0, \infty)$ 上连续的 $l \times l$ 阶方阵.

设 $X(t)$ 为方程组 (3.53) 满足条件 $X(0) = E_l$ (E_l 为 $l \times l$ 阶单位方阵) 的基本解矩阵 (亦即其列向量为方程组 (3.53) 的线性无关解的矩阵), 那么方程组 (3.53) 满足初始条件 $x(0) = x^0$ 的解为

$$x(t) = X(t)x^0.$$

非齐次方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

满足初始条件 $x(0) = x^0$ 的解可以写成

$$x(t) = X(t)x^0 + \int_0^t X(t)X^{-1}(s)f(s)ds. \tag{3.54}$$

如果 $A(t) = A$ 为常数矩阵, 则 $X(t)$ 为矩阵幂

$$X(t) = \exp(At) = E_l + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots,$$

而且有

$$X^{-1}(s) = X(-s) = \exp(-As), \quad X(t)X^{-1}(s) = \exp\big(A(t-s)\big). \tag{3.55}$$

如果矩阵 A 的任一特征值 λ_i 都满足不等式 $\mathrm{Re}\lambda_i < -\alpha < 0$, 那么存在常数 $c > 0$, 使得对 $t \geqslant 0$ 有

$$\| \exp(At) \| \leqslant c\exp(-\alpha t). \tag{3.56}$$

这是由于: 作为基本解矩阵 $\exp(At)$ 列向量的 $x_i(t)$, $i = 1, 2, \cdots, l$, 是方程组 (3.53) 的线性无关解, 且其形式为 $x_i(t) = P_{n_i}(t)\exp(\lambda_i t)$, $i = 1, 2, \cdots, l$, 这里 $P_{n_i}(t)$ 为 t 的多项式.

现在考虑线性非齐次的 Volterra 积分方程组

$$x(t) = \int_0^t K(t,s)x(s)ds + f(s),$$

其中 $x(t)$ 和 $f(t)$ 为 l 维向量函数, 而 $K(t,s)$ 为矩阵核 ($l \times l$ 阶方阵). 假设 $f(t)$ 和 $K(t,s)$ 分别在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 和 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ 上连续. 于是上面的积分方程组存在唯一的连续解, 它可以写成如下形式

$$x(t) = f(t) + \int_0^t R(t,s)f(s)ds, \tag{3.57}$$

其中 $R(t,s)$ 为核 $K(t,s)$ 的预解式 ($l \times l$ 阶方阵), 它由 (在区域 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ 上一致收敛) 的级数

$$R(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} K_k(t,s),$$

所确定, 其中叠代核 $K_k(t,s)$ 为

$$K_1(t,s) = K(t,s), \quad K_k(t,s) = \int_s^t K_{k-1}(t,p)K(p,s)dp, \ k = 2, 3, \cdots$$

(例如参看 [44]) .

3. 边界函数的估计

引理 3.1 对于边界函数 $\Pi_i x(\tau)$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$, 有不等式

$$\| \Pi_i x(\tau) \| \leqslant c \exp(-\kappa\tau), \quad 当 \quad \tau \geqslant 0 \tag{3.58}$$

成立, 其中 $c > 0$ 和 $\kappa > 0$ 为某些常数.

证明 我们在 §9 中得到, 对 $\tau \geqslant 0$ 有 $\Pi_0 y(\tau) \equiv 0$, 而 $\Pi_0 z(\tau)$ 为方程组 (3.43) 满足初始条件 (3.42) 的解, 并且当 $\tau \to \infty$ 时有 $\Pi_0 z(\tau) \to 0$. 由此得出, 对任给的 $\delta > 0$, 存在 $\tau_0 = \tau_0(\delta)$, 使得

$$\| \Pi_0 z(\tau) \| \leqslant \delta, \quad 当 \quad \tau \geqslant \tau_0. \tag{3.59}$$

我们在 $\tau \geqslant \tau_0$ 上考虑方程组 (3.43), 并将它写成

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau} = \overline{F}_z(0)\Pi_0 z + G(\Pi_0 z), \tag{3.60}$$

其中 $\overline{F}_z(0) = F_z(\overline{z}_0(0), y^0, 0)$, $G(\Pi_0 z) = F(\overline{z}_0(0) + \Pi_0 z, y^0, 0) - \overline{F}_z(0)\Pi_0 z$. 函数 $G(u)$ 具有下列两条性质:

1. 由 (3.31), (3.40) 可知, $G(0) = F(\overline{z}_0(0), y^0, 0) = 0$;
2. 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \eta(\varepsilon)$, 使得当 $\| u_1 \| < \eta, \| u_2 \| < \eta$ 时有

$$\| G(u_1) - G(u_2) \| \leqslant \varepsilon \| u_1 - u_2 \| . \tag{3.61}$$

这一条性质不难验证, 只要对差 $G(u_1) - G(u_2)$ 运用有限增量公式: $G(u_1) - G(u_2) = G_u^*(u_1 - u_2)$, 这里 $G_u^* = F_z^* - \overline{F}_z(0)$, 而且矩阵 F_z^* 的元素 $\dfrac{\partial F^i}{\partial z^j}$ 在中间点 $(\overline{z}_0(0) + u_2 + \theta_i(u_1 - u_2), y^0, 0)$, $0 < \theta_i < 1$, $i, j = 1, 2, \cdots, M$ 取值. 由此得出, 当 $\| u_1 \|$ 和 $\| u_2 \|$ 充分小时, $\| G_u^* \|$ 即可任意小, 从而 (3.61) 成立.

根据 (3.59) 即知, $\Pi_0 z(\tau_0)$ 满足不等式

$$\| \Pi_0 z(\tau_0) \| \leqslant \delta. \tag{3.62}$$

当 $\tau \geqslant \tau_0$ 时, 代替 (3.60) 我们考虑与它等价的积分方程

$$\Pi_0 z(\tau) = \exp\left(\overline{F}_z(0)(\tau - \tau_0)\right)\Pi_0 z(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left(\overline{F}_z(0)(\tau - s)\right) G(\Pi_0 z(s)) ds. \tag{3.63}$$

为了得到对 $\Pi_0 z(\tau)$ 的指数式估计 (3.58), 我们运用逐次逼近法: 令

$$\overset{(0)}{\Pi}_0 z(\tau) = \exp\left(\overline{F}_z(0)(\tau - \tau_0)\right)\Pi_0 z(\tau_0),$$

对于 $k = 1, 2, \cdots$, 取

$$\overset{(k)}{\Pi}_0 z(\tau) = \exp\left(\overline{F}_z(0)(\tau - \tau_0)\right)\Pi_0 z(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left(\overline{F}_z(0)(\tau - s)\right) G\left(\overset{(k-1)}{\Pi}_0 z(s)\right) ds.$$

因为根据条件IV, 矩阵 $\overline{F}_z(0)$ 的特征值 $\overline{\lambda}_i(0)$ 满足不等式 $\mathrm{Re}\overline{\lambda}_i(0) < -\alpha < 0$ (见 (3.23)), 所以存在常数 $c_1 > 0$, 使得 (见 (3.56))

$$\| \exp\left(\overline{F}_z(0)(\tau - s)\right) \| \leqslant c_1 \exp(-\alpha(\tau - s)), \quad \tau_0 \leqslant s \leqslant \tau < \infty.$$

由此根据 (3.62) 得出, 当 $\tau \geqslant \tau_0$ 时有

$$\left\| \overset{(0)}{\Pi}_0 z(\tau) \right\| \leqslant c_1 \exp(-\alpha(\tau - \tau_0)) \| \Pi_0 z(\tau_0) \| \leqslant \delta c_1 \exp(-\alpha(\tau - \tau_0)).$$

在区间 $(0, \alpha)$ 中任取 κ, 并将它固定下来, 于是有

$$\left\| \overset{(0)}{\Pi}_0 z(\tau) \right\| \leqslant \delta c_1 \exp(-\kappa(\tau - \tau_0)), \quad 当 \ \tau \geqslant \tau_0. \tag{3.64}$$

现在取 $\varepsilon > 0$ 如此之小, 使得不等式

$$q \overset{\text{def}}{=} \frac{\varepsilon c_1}{\alpha - \kappa} < 1$$

成立. 对于这样的 ε, 相应地存在某个 $\eta = \eta(\varepsilon)$, 使得满足条件 (3.61). 其次选取不等式 (3.59) 中的 δ 这样小, 使得满足不等式

$$\frac{\delta c_1}{1 - q} \leqslant \eta;$$

只要 $\tau_0 = \tau_0(\delta)$ 充分大, 这样的 δ 总可以取到. 于是根据 (3.64) 和 (3.61) 即知当 $\tau \geqslant \tau_0$ 时有不等式

$$\left\| \overset{(0)}{\Pi}_0 z(\tau) \right\| \leqslant \eta$$

和不等式

$$\begin{aligned}
\left\| \overset{(1)}{\Pi}_0 z(\tau) - \overset{(0)}{\Pi}_0 z(\tau) \right\| &\leqslant \int_{\tau_0}^{\tau} \| \exp(\overline{F}_z(0)(\tau - s)) \| \left\| G(\overset{(0)}{\Pi}_0 z(s)) - G(0) \right\| ds \\
&\leqslant \int_{\tau_0}^{\tau} c_1 \exp(-\alpha(\tau - s)) \varepsilon \delta c_1 \exp(-\kappa(s - \tau_0)) ds \\
&\leqslant \delta c_1 \varepsilon c_1 \exp(-\kappa(\tau - \tau_0)) \int_{\tau_0}^{\tau} \exp(-(\alpha - \kappa)(\tau - s)) ds \\
&\leqslant \delta c_1 \frac{\varepsilon c_1}{\alpha - \kappa} \exp(-\kappa(\tau - \tau_0)) \\
&= \delta c_1 q \exp(-\kappa(\tau - \tau_0))
\end{aligned} \tag{3.65}$$

成立. 由此得出

$$\left\|\overset{(1)}{\Pi}_0 z(\tau)\right\| \leqslant \delta c_1(1+q)\exp(-\kappa(\tau-\tau_0)) < \frac{\delta c_1}{1-q}\exp(-\kappa(\tau-\tau_0)) \leqslant \eta,\ \ \tau \geqslant \tau_0. \tag{3.66}$$

我们用归纳法证明: 当 $\tau \geqslant \tau_0$ 时有

$$\left\|\overset{(k)}{\Pi}_0 z(\tau)\right\| \leqslant \delta c_1(1+q+\cdots+q^k)\exp(-\kappa(\tau-\tau_0)),\ k=0,1,\cdots, \tag{3.67}$$

$$\left\|\overset{(k)}{\Pi}_0 z(\tau) - \overset{(k-1)}{\Pi_0} z(\tau)\right\| \leqslant \delta c_1 q^k \exp(-\kappa(\tau-\tau_0)),\ k=1,2,\cdots. \tag{3.68}$$

由 (3.66) 和 (3.65) 可知: 当 $k=1$ 时, (3.67) 和 (3.68) 是正确的. 假设 (3.67) 和 (3.68) 直到号码 k 都正确, 那么由于 (3.67), 当 $\tau \geqslant \tau_0$ 时有

$$\left\|\overset{(k-1)}{\Pi_0} z(\tau)\right\| \leqslant \delta c_1(1+q+\cdots+q^{k-1})\exp(-\kappa(\tau-\tau_0)) \leqslant \frac{\delta c_1}{1-q}\exp(-\kappa(\tau-\tau_0)) \leqslant \eta.$$

类似地, 当 $\tau \geqslant \tau_0$ 时有 $\left\|\overset{(k)}{\Pi}_0 z(\tau)\right\| \leqslant \eta$. 由此利用性质 (3.61) 和不等式 (3.68) 可得

$$\begin{aligned}
&\left\|\overset{(k+1)}{\Pi_0} z(\tau) - \overset{(k)}{\Pi}_0 z(\tau)\right\| \\
&\leqslant \int_{\tau_0}^{\tau} \|\exp(\overline{F}_z(0)(\tau-s))\| \left\|G\left(\overset{(k)}{\Pi}_0 z(s)\right) - G\left(\overset{(k-1)}{\Pi_0} z(s)\right)\right\| ds \\
&\leqslant \int_{\tau_0}^{\tau} c_1\exp(-\alpha(\tau-s))\varepsilon \left\|\overset{(k)}{\Pi}_0 z(\tau) - \overset{(k-1)}{\Pi_0} z(\tau)\right\| ds \\
&\leqslant \int_{\tau_0}^{\tau} c_1\exp(-\alpha(\tau-s))\varepsilon\delta c_1 q^k \exp(-\kappa(s-\tau_0))ds \\
&= \delta c_1\varepsilon c_1 q^k \exp(-\kappa(\tau-\tau_0)) \int_{\tau_0}^{\tau} \exp(-(\alpha-\kappa)(\tau-s))ds \\
&\leqslant \delta c_1 \frac{\varepsilon c_1}{\alpha-\kappa} q^k \exp(-\kappa(\tau-\tau_0)) \\
&= \delta c_1 q^{k+1}\exp(-\kappa(\tau-\tau_0)),\quad \tau \geqslant \tau_0.
\end{aligned}$$

这就证明了 (3.68) 对 $k+1$ 的正确性. 从最后这个不等式以及 (3.67) 式得出对 $\tau \geqslant \tau_0$ 有

$$\left\|\overset{(k+1)}{\Pi_0} z(\tau)\right\| \leqslant \delta c_1(1+q+\cdots+q^{k+1})\exp(-\kappa(\tau-\tau_0)),$$

亦即 (3.67) 对 $k+1$ 也正确.

由不等式 (3.68) 和恒等式

$$\overset{(k)}{\Pi_0} z = \left(\overset{(k)}{\Pi_0} z - \overset{(k-1)}{\Pi_0} z\right) + \left(\overset{(k-1)}{\Pi_0} z - \overset{(k-2)}{\Pi_0} z\right) + \cdots + \left(\overset{(1)}{\Pi_0} z - \overset{(0)}{\Pi_0} z\right)$$

得出收敛于方程组 (3.43) 解 $\Pi_0 z(\tau)$ 的逐次逼近序列 $\{\overset{(k)}{\Pi_0} z(\tau)\}$ 当 $\tau \geqslant \tau_0$ 时对 τ 的一致收敛性, 而且从 (3.67) 得出估计

$$\| \Pi_0 z(\tau) \| \leqslant \frac{\delta c_1}{1-q} \exp(-\kappa(\tau - \tau_0)), \quad 当 \tau \geqslant \tau_0. \tag{3.69}$$

当 $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0$ 时, 问题 (3.43), (3.42) 的解 $\Pi_0 z(\tau)$ 以某常数 c_2 为界:

$$\| \Pi_0 z(\tau) \| \leqslant c_2, \quad 当 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0. \tag{3.70}$$

如果令 $c = \max\left\{c_2 \exp(\kappa\tau_0), \dfrac{\delta c_1}{1-q} \exp(\kappa\tau_0)\right\}$, 则由 (3.69), (3.70) 有不等式

$$\| \Pi_0 z(\tau) \| \leqslant c \exp(-\kappa\tau), \quad 当 \tau \geqslant 0 \tag{3.71}$$

成立, 亦即对 $i = 0$ 证明了不等式 (3.58).

我们转到当 $i = 1$ 时不等式 (3.58) 的证明. 根据 (3.34) 可将 (3.46) 右端的被积函数写成

$$\Pi_0 f(s) = f(\overline{z}_0(0) + \Pi_0 z(s), y^0, 0) - f(\overline{z}_0(0), y^0, 0) = f_z^* \Pi_0 z(s),$$

其中矩阵 f_z^* 的元素 $\dfrac{\partial f^i}{\partial z^j}$ 是在中间点 $(\overline{z}_0(0) + \theta_i \Pi_0 z(s), y^0, 0)$, $0 < \theta_i < 1$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, M$, 处取值的; 由此得出 $\| f_z^* \|$ 的有界性. 根据 (3.71) 从最后这个等式即得

$$\| \Pi_0 f(s) \| \leqslant c \exp(-\kappa s), \quad s \geqslant 0. \tag{3.72}$$

□

注 1. 这里的常数 c 一般来说与在 (3.71) 中的 c 并不一样, 但为了简单起见, 我们约定对这种不依赖于 μ 、其大小在讨论中不起本质作用的相似常数, 今后总用同一个符号 c 来表示.

从得到的不等式 (3.72) 即可推出 (3.45) 右端反常积分的收敛性以及对 $\Pi_1 y(\tau)$ 的如下估计:

$$\| \Pi_1 y(\tau) \| \leqslant c \int_\tau^\infty \exp(-\kappa s) ds = \frac{c}{\kappa} \exp(-\kappa\tau), \quad \tau \geqslant 0.$$

根据注 1, 常数 c/κ 仍然用 c 来表示, 因此有

$$\| \Pi_1 y(\tau) \| \leqslant c \exp(-\kappa\tau), \quad \tau \geqslant 0. \tag{3.73}$$

对于 $\Pi_1 z(\tau)$ 的方程 (见 (3.34)), 我们把它重新写成

$$\frac{d\Pi_1 z}{d\tau} = F_z(\tau)\Pi_1 z + \widetilde{G}_1(\tau), \tag{3.74}$$

其中 $\widetilde{G}_1(\tau) = F_y(\tau)\Pi_1 y(\tau) + G_1(\tau)$, 而 $G_1(\tau)$ 是由公式 (3.35) 确定. 类似于不等式 (3.72), 由此我们可得估计

$$\| G_1(\tau) \| \leqslant (c\tau + c)\exp(-\kappa\tau), \quad 当\, \tau \geqslant 0.$$

取 $\kappa_1 < \kappa$, 考虑到注 1 即得 $(c\tau + c)\exp(-\kappa\tau) \leqslant c\exp(-\kappa_1\tau)$.

注 2. 在这个引理的证明中, 以及在以后类似的情况下, 这样减小参数 κ 还必须进行有限次. 为了简单起见, 我们约定仍然用同一个字母 κ 来表示 (以代替 $\kappa_1, \kappa_2, \cdots$).

于是有

$$\| G_1(\tau) \| \leqslant c\exp(-\kappa\tau), \quad 当\, \tau \geqslant 0. \tag{3.75}$$

由此及 (3.73) 即可推出当 $\tau \geqslant 0$ 时有 $\| \widetilde{G}_1(\tau) \| \leqslant c\exp(-\kappa\tau)$.

方程组 (3.74) 在初始条件 (3.48) 之下的解可以写成

$$\Pi_1 z(\tau) = -\Phi(\tau)\overline{z}_1(0) + \int_0^\tau \Phi(\tau)\Phi^{-1}(s)\widetilde{G}_1(s)ds, \tag{3.76}$$

其中 $\Phi(\tau)$ 为齐次方程组初值问题

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = F_z(\tau)\Phi, \quad \Phi(0) = E_M$$

的基本解矩阵. 类似于推导 $\Pi_0 z(\tau)$ 的估计式 (3.71), 不难证明

$$\| \Phi(\tau) \| \leqslant c\exp(-\kappa\tau), \quad 当\, \tau \geqslant 0, \tag{3.77}$$

$$\| \Phi(\tau)\Phi^{-1}(s) \| \leqslant c\exp(-\kappa(\tau - s)), \quad 当\, 0 \leqslant s \leqslant \tau. \tag{3.78}$$

利用这些不等式和对 $\| \widetilde{G}_1(\tau) \|$ 的估计, 从 (3.76) 即得

$$\| \Pi_1 z(\tau) \| \leqslant c\exp(-\kappa\tau), \quad 当\, \tau \geqslant 0. \tag{3.79}$$

不等式 (3.73) 和 (3.79) 完成了当 $i = 1$ 时对 (3.58) 的证明.

下面我们用归纳法进行证明. 假设不等式 (3.58) 对 $i = 0, 1, \cdots, k-1$ 都成立. 从 (3.37) 的第二组方程有

$$\Pi_k y(\tau) = \Pi_k y(0) + \int_0^\pi \Pi_{k-1} f(s)ds.$$

我们曾对 $\Pi_k y(\tau)$ 加上补充条件: 当 $\tau \to \infty$ 时有 $\Pi_k y(\tau) \to 0$; 由此推出

$$\Pi_k y(0) = -\int_0^\infty \Pi_{k-1} f(s)ds,$$

从而可得

$$\Pi_k y(\tau) = -\int_\tau^\infty \Pi_{k-1} f(s) ds.$$

因此为了对 $\Pi_k y(\tau)$ 证明不等式 (3.58), 只需证明当 $\tau \geqslant 0$ 时有

$$\| \Pi_{k-1} f(\tau) \| \leqslant c \exp(-\kappa\tau) \tag{3.80}$$

即可. 为此目的, 我们仔细地考虑表达式

$$\Pi f = f(\overline{z}(\mu\tau,\mu) + \Pi z(\tau,\mu), \overline{y}(\mu\tau,\mu) + \Pi y(\tau,\mu), \mu\tau) - f(\overline{z}(\mu\tau,\mu), \overline{y}(\mu\tau,\mu), \mu\tau)$$

对 μ 的幂级数展开式. 我们引进函数

$$\Psi(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} f(\overline{z}(\mu\tau,\mu), +\sigma\Pi z(\tau,\mu), \overline{y}(\mu\tau,\mu) + \sigma\Pi y(\tau,\mu), \mu\tau).$$

于是有

$$\Pi f = \Psi(1) - \Psi(0) = \int_0^1 \frac{d\Psi}{d\sigma} d\sigma = \left(\int_0^1 f_z\, d\sigma\right)\Pi z(\tau,\mu) + \left(\int_0^1 f_y\, d\sigma\right)\Pi y(\tau,\mu),$$

其中矩阵 f_z 和 f_y 的元素是在点 $(\overline{z}(\mu\tau,\mu)+\sigma\Pi z(\tau,\mu), \overline{y}(\mu\tau,\mu)+\sigma\Pi y(\tau,\mu), \mu\tau)$ 处取值的. 我们用 (3.25) 右端的级数代替 $\overline{z}(\mu\tau,\mu), \overline{y}(\mu\tau,\mu)$, 并把这些级数的系数 $\overline{x}_k(t)$ 表示成 $\overline{x}_k(t) = \overline{x}_k(\mu\tau) = \overline{x}_k(0) + \mu\overline{x}'_k(0 + \cdots$; 而同样用 (3.26) 右端的级数代替 $\Pi z(\tau,\mu)$, $\Pi y(\tau,\mu)$; 然后在点

$$(\overline{z}_0(0) + \sigma\Pi_0 z(\tau),\ \overline{y}_0(0) + \sigma\Pi_0 y(\tau),\ 0) = (\overline{z}_0(0) + \sigma\Pi_0 z(\tau),\ y^0,\ 0)$$

处将 f_z 和 f_y 进行 Taylor 级数展开, 并且合并关于 μ 同次幂的项即得

$$f_z(\overline{z}(\mu\tau,\mu) + \sigma\Pi z(\tau,\mu), \overline{y}(\mu\tau,\mu) + \sigma\Pi y(\tau,\mu), \mu\tau) = A_0(\sigma,\tau) + \mu A_1(\sigma,\tau) + \cdots,$$

$$f_y(\overline{z}(\mu\tau,\mu) + \sigma\Pi z(\tau,\mu), \overline{y}(\mu\tau,\mu) + \sigma\Pi y(\tau,\mu), \mu\tau) = B_0(\sigma,\tau) + \mu B_1(\sigma,\tau) + \cdots,$$

其中 $A_i(\sigma,\tau), B_i(\sigma,\tau)$ 均为当 $\tau \to \infty$ 时其元素增长不比 τ^i 快的矩阵. 由此得出, 在 Πf 展开式中 μ^{k-1} 的系数 $\Pi_{k-1} f$ 为

$$\Pi_{k-1} f(\tau) = \sum_{i=0}^{k-1} \left[\left(\int_0^1 A_i(\sigma,\tau) d\sigma\right)\Pi_{k-1-i} z(\tau) + \left(\int_0^1 B_i(\sigma,\tau) d\sigma\right)\Pi_{k-1-i} y(\tau)\right]. \tag{3.81}$$

由于按归纳法假设, $\Pi_i z(\tau), \Pi_i y(\tau)$, $i = 0, 1, \cdots, k-1$, 都满足不等式 (3.58), 所以从 (3.81) 直接推出对 $\| \Pi_{k-i} f(\tau) \|$ 的估计式 (3.80), 亦即对于 $\Pi_k y(\tau)$ 的不等式 (3.58).

对于 $\Pi_k z(\tau)$ 的方程 (见 (3.37)), 现在可将它重新写成

$$\frac{d\Pi_k z}{d\tau} = F_z(\tau)\Pi_k z + \widetilde{G}_k(\tau), \tag{3.82}$$

其中 $\widetilde{G}_k(\tau) = F_y(\tau)\Pi_k y(\tau) + G_k(\tau)$. 类似于对 $\Pi_{k-1}f(\tau)$ 估计式的推导, 对 $G_k(\tau)$ 同样可以得到估计 $\| G_k(\tau) \| \leqslant c\exp(-\kappa\tau)$, $\tau \geqslant 0$. 像从问题 (3.74), (3.48) 求出 $\Pi_1 z(\tau)$ 一样, 在初始条件 (3.50) 之下求解方程组 (3.82) 即得

$$\| \Pi_k z(\tau) \| \leqslant c\exp(-\kappa\tau), \quad 当\ \tau \geqslant 0.$$

这就完成了引理 3.1 的证明. □

注 3. 我们考虑当 $(y,t) \in \overline{D}_1$ 时的附加方程组

$$\frac{d\widetilde{z}}{d\tau} = F(\widetilde{z}, y, t), \tag{3.83}$$

这里 $\overline{D}_1$ 是由条件IV所确定. 变量替换 $\widetilde{z} = \Pi z + \varphi(y,t)$ 将 (3.83) 变成类似于 (3.43) 的形式:

$$\frac{d\Pi z}{d\tau} = F(\varphi(y,t) + \Pi z, y, t). \tag{3.84}$$

方程组 (3.84) 的奇点是 $\Pi z = 0$, 而矩阵 $F_z(\varphi(y,t), y, t)$ 的特征值 $\lambda_i(y,t)$ 满足不等式 (3.23). 由此得出: 存在常数 $c > 0$, 使得当 $0 \leqslant s \leqslant \tau < \infty$ 时有

$$\| \exp(F_z(\varphi(y,t), y, t)(\tau - s)) \| \leqslant c\exp(-\alpha(\tau - s)).$$

在 [39] 中证明了对所有 $(y,t) \in \overline{D}_1$ 存在使得上式成立的共同常数 c (也见 [60]). 考虑到方程组 (3.84) 在 $\tau = 0$ 时有满足不等式 $\|\Pi z(0)\| \leqslant \delta$的初始条件, 并像对 (3.60) 那样应用逐次逼近法, 即可得到解在 $\tau \geqslant 0$ 上存在, 且满足不等式

$$\| \Pi z(\tau) \| \leqslant \frac{\delta c}{1-q}\exp(-\kappa\tau), \quad 当\ \tau \geqslant 0.$$

由此得出, 在稳定性条件 (3.22) 之下, 附加方程组 (3.83) 的奇点 $\widetilde{z} = \varphi(y,t)$ 关于 $\overline{D}_1$ 是一致渐近稳定的. 这就证明了在 §9 第一段后面所做出的结论.

4. 定理 3.1 的证明 我们令

$$u(t,\mu) = z(t,\mu) - Z_n(t,\mu), \quad v(t,\mu) = y(t,\mu) - Y_n(t,\mu),$$

其中 $z(t,\mu), y(t,\mu)$ 为问题 (3.18), (3.19) 的解, 而 $Z_n(t,\mu), Y_n(t,\mu)$ 由公式 (3.51) 确定, 亦即

$$Z_n(t,\mu) = \sum_{k=0}^{n} \mu^k(\overline{z}_k(t) + \Pi_k z(\tau)), \quad Y_n(t,\mu) = \sum_{k=0}^{n} \mu^k(\overline{y}_k(t) + \Pi_k y(\tau)).$$

将 $z = u + Z_n$, $y = v + Y_n$ 代入 (3.18), (3.19), 即得余项 $u(t,\mu), v(t,\mu)$ 的方程组

$$\begin{cases} \mu\dfrac{du}{dt} = F(u + Z_n, v + Y_n, t) - \mu\dfrac{dZ_n}{dt}, \\ \dfrac{dv}{dt} = f(u + Z_n, v + Y_n, t) - \dfrac{dY_n}{dt}; \end{cases} \tag{3.85}$$

以及它们的初始条件

$$u(0,\mu)=0,\quad v(0,\mu)=0. \tag{3.86}$$

正如定理3.1后面的注所指出那样, 问题 (3.85), (3.86) 解在区间 $0\leqslant t\leqslant T$ 上的存在性可由定理 2.3 得出; 因此为了证明不等式 (3.52) 只需再证存在常数 $\mu_0>0$ 和 $c>0$, 使得当 $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时对一切 $t\in[0,T]$ 有估计式

$$\| u(t,\mu) \|\leqslant c\mu^{n+1},\quad \| v(t,\mu) \|\leqslant c\mu^{n+1}. \tag{3.87}$$

但在证明不等式 (3.87) 时, 我们不依赖于定理 2.3 而顺便地再一次证明了问题 (3.85), (3.86) 解的存在性.

我们首先考虑表达式

$$\begin{cases} H_1(t,\mu)=F(Z_n(t,\mu),Y_n(t,\mu),t)-\mu\dfrac{dZ_n(t,\mu)}{dt},\\ H_2(t,\mu)=f(Z_n(t,\mu),Y_n(t,\mu),t)-\dfrac{dY_n(t,\mu)}{dt}; \end{cases} \tag{3.88}$$

并证明当 μ 充分小时 $(0<\mu\leqslant\mu_0)$ 对 $t\in[0,T]$ 有估计式

$$\| H_1(t,\mu) \|\leqslant c\mu^{n+1},\quad \| H_2(t,\mu) \|\leqslant c\left(\mu^{n+1}+\mu^n\exp\left(-\frac{\kappa t}{\mu}\right)\right), \tag{3.89}$$

其中 c 为常数.

例如, 我们证明 (3.89) 中第二个不等式; 为此把 $H_2(t,\mu)$ 的表达式重新写成

$$\begin{aligned} H_2(t,\mu)=&\Big[f\Big(\overline{z}_0(\mu\tau)+\cdots+\mu^n\overline{z}_n(\mu\tau)+\Pi_0z(\tau)+\cdots+\mu^n\Pi_nz(\tau),\\ &\overline{y}_0(\mu\tau)+\cdots+\mu^n\overline{y}_n(\mu\tau)+\mu\Pi_1y(\tau)+\cdots+\mu^n\Pi_ny(\tau),\ \mu\tau\Big)\\ &-f\Big(\overline{z}_0(\mu\tau)+\cdots+\mu^n\overline{z}_n(\mu\tau),\ \overline{y}_0(\mu\tau)+\cdots+\mu^n\overline{y}_n(\mu\tau),\ \mu\tau\Big)\\ &-\frac{d}{d\tau}\Big(\Pi_1y(\tau)+\cdots+\mu^{n-1}\Pi_ny(\tau)\Big)\Big]\\ &+\Big[f\Big(\overline{z}_0(t)+\cdots+\mu^n\overline{z}_n(t),\ \overline{y}_0(t)+\cdots+\mu^n\overline{y}_n(t),\ t\Big)\\ &-\frac{d}{dt}\Big(\overline{y}_0(t)+\cdots+\mu^n\overline{y}_n(t)\Big)\Big]. \end{aligned} \tag{3.90}$$

利用在证明估计式 (3.80) 时所使用的同样方法, 不难证明当 $\mu\in(0,\mu_0]$ 充分小时有

$$\begin{aligned} &f\Big(\overline{z}_0(\mu\tau)+\cdots+\mu^n\overline{z}_n(\mu\tau)+\Pi_0z(\tau)+\cdots+\mu^n\Pi_nz(\tau),\ \overline{y}_0(\mu\tau)+\cdots\\ &+\mu^n\overline{y}_n(\mu\tau)+\mu\Pi_1y(\tau)+\cdots+\mu^n\Pi_ny(\tau),\ \mu\tau\Big)-f\Big(\overline{z}_0(\mu\tau)+\cdots+\mu^n\overline{z}_n(\mu\tau),\\ &\overline{y}_0(\mu\tau)+\cdots+\mu^n\overline{y}_n(\mu\tau),\ \mu\tau\Big)=\sum_{k=0}^{n}\mu^k\Pi_kf(\tau)+O(\mu^{n+1}); \end{aligned} \tag{3.91}$$

与前面一样, 这里 $O(\alpha(t,\mu))$ 表示当 $0 \leqslant t \leqslant T, 0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时满足不等式 $\| O(\alpha(t,\mu)) \| \leqslant c\,\alpha(t,\mu)$ 的量.

注 4. 常数 μ_0 充分小的要求, 在本定理的下面证明以及后面的其他章节中将不止一次遇到. 类似于在注 1 和注 2 中对常数 c 和 κ 所说明的那样, 我们约定今后也用同一个 μ_0 表示满足对 μ 充分小的所有要求: $0 < \mu \leqslant \mu_0$.

根据方程 (3.34), (3.37), 从 (3.91) 得出, 在 (3.90) 中的第一个方括号应等于 $\mu^n \Pi_n\ f(\tau) + O(\mu^{n+1})$, 亦即有量阶 $O\Big(\mu^{n+1} + \mu^n \exp\Big(-\frac{\kappa t}{\mu}\Big)\Big)$. 类似地, 根据方程 (3.31), (3.33), (3.36) 以及等式

$$f(\overline{z}_0(t) + \cdots + \mu^n \overline{z}_n(t), \overline{y}_0(t) + \cdots + \mu^n \overline{y}_n(t), t) = \sum_{k=0}^{n} \mu^k \overline{f}_k + O(\mu^{n+1})$$

得出在 (3.90) 中的第二个方括号有量阶 $O(\mu^{n+1})$. 因此

$$H_2(t,\mu) = O\left(\mu^{n+1} + \mu^n \exp\left(-\frac{\kappa t}{\mu}\right)\right).$$

这就证明了 (3.89) 中的第二个不等式. 类似地可以证明 (3.89) 中的第一个不等式.

我们现在回到问题 (3.85), (3.86), 并将方程组 (3.85) 写成

$$\begin{cases} \mu \dfrac{du}{dt} = F_z(t,\mu)u + F_y(t,\mu)v + G_1(u,v,t,\mu), \\ \dfrac{dv}{dt} = f_z(t,\mu)u + f_y(t,\mu)v + G_2(u,v,t,\mu); \end{cases} \tag{3.92}$$

其中矩阵 $F_z(t,\mu), F_y(t,\mu), f_z(t,\mu), f_y(t,\mu)$ 的元素都是在点 $(\overline{z}_0(t) + \Pi_0 z(t/\mu), \overline{y}_0(t), t)$ 处取值的, 而

$$G_1(u,v,t,\mu) = F(u + Z_n, v + Y_n, t) - \mu \frac{dZ_n}{dt} - F_z(t,\mu)u - F_y(t,\mu)v,$$

$$G_2(u,v,t,\mu) = f(u + Z_n, v + Y_n, t) - \frac{dY_n}{dt} - f_z(t,\mu)u - f_y(t,\mu)v.$$

我们注意到函数 G_1 和 G_2 有如下两个对今后来讲是重要的性质:

1. 当 $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时有

$$\| G_1(0,0,t,\mu) \| = \| H_1(t,\mu) \| \leqslant c\,\mu^{n+1},$$

$$\| G_2(0,0,t,\mu) \| = \| H_2(t,\mu) \| \leqslant c\left(\mu^{n+1} + \mu^n \exp\left(-\frac{\kappa t}{\mu}\right)\right);$$

2. 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 常数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 和 $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon)$, 使得只要 $\| u_1 \| \leqslant \delta, \| u_2 \| \leqslant \delta$, $\| v_1 \| \leqslant \delta, \| v_2 \| \leqslant \delta, 0 < \mu \leqslant \mu_0$, 则对 $i = 1,2$ 有

$$\| G_i(u_1,v_1,t,\mu) - G_i(u_2,v_2,t,\mu) \| \leqslant \varepsilon(\| u_1 - u_2 \| + \| v_1 - v_2 \|). \tag{3.93}$$

为了证明后一条性质，只要对 (3.93) 左端的差应用中值定理，并考虑到当 $\| u \|, \| v \|, \mu_0$ 充分小时，$\| G_{1u} \| = \| F_z(u+Z_n, v+Y_n, t) - F_z(Z_0, Y_0, t) \|, \| G_{1v} \|$, $\| G_{2u} \|$ 和 $\| G_{2v} \|$ 均可任意小.

代替初值问题 (3.92) 和初始条件 (3.86), 我们考虑与它等价的积分方程组

$$\begin{cases} u(t,\mu) = \int_0^t U(t,s,\mu)\frac{1}{\mu}\big[F_y(s,\mu)v(s,\mu) + G_1(u,v,s,\mu)\big]ds, \\ v(t,\mu) = \int_0^t V(t,s,\mu)\big[f_z(s,\mu)u(s,\mu) + G_2(u,v,s,\mu)\big]ds; \end{cases} \tag{3.94}$$

其中 $U(t,s,\mu)$ 和 $V(t,s,\mu)$ 为矩阵方程初值问题

$$\begin{cases} \mu\dfrac{dU}{dt} = F_z(t,\mu)U,\ U(s,s,\mu) - E_M; \\ \dfrac{dV}{dt} = f_y(t,\mu)V,\ V(s,s,\mu) = E_m; \end{cases} \tag{3.95}$$

的解. 由于 $\| f_y(t,\mu) \|$ 在 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 上的有界性, 所以矩阵 $V(t,s,\mu)$ 也是有界的. 至于矩阵 $U(t,s,\mu)$, 可以证明: 当 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时有指数式估计

$$\| U(t,s,\mu) \| \leqslant c \exp\left(-\frac{\kappa(t-s)}{\mu}\right), \tag{3.96}$$

其中 $\kappa > 0$ 为某常数. 为此我们利用下面引理 (参看 [60]), 其证明将在本节第五段给出.

引理 3.2 假设方阵 $A(t)$ 在 $[0,T]$ 上连续, 且其特征值 $\lambda_i(t)$ 满足不等式

$$\operatorname{Re}\lambda_i(t) < -2\sigma < 0, \quad 当\ 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{3.97}$$

那么当 μ 充分小时 $(0 < \mu \leqslant \mu_0)$, 矩阵方程初值问题

$$\mu\frac{dW}{dt} = A(t)W, \quad W(s,s,\mu) = E_M, \tag{3.98}$$

的解 $W(t,s,\mu)$ 满足估计

$$\| W(t,s,\mu) \| \leqslant c \exp\left(-\frac{\sigma(t-s)}{\mu}\right), \quad 当\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T. \tag{3.99}$$

引理3.2不能直接应用到方程组 (3.95) 的第一个方程上, 因为一般说来, 矩阵 $F_z(t,\mu)$ 的特征值在点 $t=0$ 的某个邻域中不满足不等式 (3.97), 所以为了证明 (3.96), 我们将 (3.95) 的第一个问题重新写成

$$\mu\frac{dU}{dt} = \overline{F}_z(t)U + K(t,\mu)U, \quad U(s,s,\mu) = E_M; \tag{3.100}$$

其中

$$K(t,\mu) = F_z(t,\mu) - \overline{F}_z(t) = F_z\big(\overline{z}_0(t) + \Pi_0 z(t/\mu), \overline{y}_0(t), t\big) - F_z\big(\overline{z}_0(t), \overline{y}_0(t), t\big).$$

由于 (3.22), 矩阵 $\overline{F}_z(t)$ 满足条件 (3.97); 而且只要 τ_0 充分大, 当 $t \geqslant \mu\tau_0$ 时显然 $\| K(t,\mu) \|$ 可以足够小. 代替初值问题 (3.100), 我们讨论等价的积分方程

$$U(t,s,\mu) = W(t,s,\mu) + \int_s^t W(t,p,\mu)\frac{1}{\mu}K(p,\mu)U(p,s,\mu)dp, \tag{3.101}$$

其中 $W(t,s,\mu)$ 为矩阵方程初值问题

$$\mu\frac{dW}{dt} = \overline{F}_z(t)W, \quad W(s,s,\mu) = E_M,$$

的解, 且由引理3.2, 它满足估计式 (3.99). 利用在证明 $\Pi_0 z(\tau)$ 的指数式估计时所用的逐次逼近法, 容易证明 $U(t,s,\mu)$ 满足估计式 (3.96).

现在把 (3.94) 中的第二个方程所确定的 $v(s,\mu)$ 代入第一个方程, 即得等价的积分方程组

$$\begin{aligned} u(t,\mu) &= \int_0^t K(t,s,\mu)u(s,\mu)ds + Q_1(u,v,t,\mu), \\ v(t,\mu) &= \int_0^t V(t,s,\mu)f_z(s,\mu)u(s,\mu)ds + Q_2(u,v,t,\mu); \end{aligned} \tag{3.102}$$

其中

$$\begin{aligned} K(t,s,\mu) &= K_1(t,s,\mu)f_z(s,\mu), \\ K_1(t,s,\mu) &= \int_s^t \frac{1}{\mu}U(t,p,\mu)F_y(p,\mu)V(p,s,\mu)dp. \end{aligned}$$

由此及 (3.96) 得出, 当 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, 0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时, $\| K_1(t,s,\mu) \| \leqslant c$; 而且由于 G_1 和 G_2 的两条性质, 积分算子

$$\begin{aligned} Q_1(u,v,t,\mu) &= \int_0^t \left[\frac{1}{\mu}U(t,s,\mu)G_1(u,v,s,\mu) + K_1(t,s,\mu)G_2(u,v,s,\mu)\right]ds, \\ Q_2(u,v,t,\mu) &= \int_0^t V(t,s,\mu)G_2(u,v,s,\mu)ds \end{aligned}$$

也具有类似的两条性质:

1. 当 $0 \leqslant t \leqslant T, 0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时, $\| Q_i(0,0,t,\mu) \| \leqslant c\mu^{n+1}, i = 1,2$;

2. 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon)$ 和 $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon)$, 使得如果当 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, 0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时有 $\| u_1(s,\mu) \| \leqslant \delta, \| u_2(s,\mu) \leqslant \delta, \| v_1(s,\mu) \| \leqslant \delta, \| v_2(s,\mu) \| \leqslant \delta$, 那么对 $i = 1,2$ 有

$$\begin{aligned} \| Q_i(u_1,v_1,t,\mu) - Q_i(u_2,v_2,t,\mu) \| \leqslant \varepsilon \max_{0\leqslant s\leqslant t} \big[& \| u_1(s,\mu) - u_2(s,\mu) \| \\ & + \| v_1(s,\mu) - v_2(s,\mu) \| \big]. \end{aligned}$$

我们用 $R(t,s,\mu)$ 记核 $K(t,s,\mu)$ 的预解式. 由于 $K(t,s,\mu)$ 的有界性, 预解式 $R(t,s,\mu)$ 也是有界的. 将 (3.102) 第一组方程中的 $Q_1(u,v,t,\mu)$ 看成该积分方程组的非齐次项, 并利用公式 (3.57), 则可代替这第一组方程以如下的等价方程

$$u(t,\mu) = Q_1(u,v,t,\mu) + \int_0^t R(t,s,\mu)Q_1(u,v,s,\mu)ds$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} S_1(u,v,t,\mu). \tag{3.103}$$

我们记 $V(t,s,\mu)f_z(s,\mu) \stackrel{\text{def}}{=} H(t,s,\mu)$, $Q_2 \stackrel{\text{def}}{=} S_2$, 则 (3.102) 的第二组方程可写成

$$v(t,\mu) = \int_0^t H(t,s,\mu)u(s,\mu)ds + S_2(u,v,t,\mu). \tag{3.104}$$

显然, 积分算子 S_1 和 S_2 也具有像 Q_1 和 Q_2 那样的两条性质.

为了完成定理的证明, 只需证明方程组 (3.103) 和 (3.104) 存在唯一解, 且有估计式

$$\| u(t,\mu) \| \leqslant c\,\mu^{n+1},\ \| v(t,\mu) \| \leqslant c\,\mu^{n+1},\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 < \mu \leqslant \mu_0, \tag{3.105}$$

成立. 为此我们利用逐次逼近法: 对 $k = 1, 2, \cdots$ 令

$$\begin{cases} \overset{(0)}{u}(t,\mu) = 0,\ \overset{(0)}{v}(t,\mu) = 0; \quad \overset{(k)}{u}(t,\mu) = S_1(\overset{(k-1)}{u}, \overset{(k-1)}{v}, t, \mu), \\ \overset{(k)}{v}(t,\mu) = \int_0^t H(t,s,\mu)\overset{(k-1)}{u}(s,\mu)ds + S_2(\overset{(k-1)}{u}, \overset{(k-1)}{v}, t, \mu). \end{cases} \tag{3.106}$$

由于 S_1 和 S_2 的第一条性质, 当 $k = 1$ 时有

$$\| \overset{(1)}{u}(t,\mu) \| \leqslant c\,\mu^{n+1},\ \| \overset{(1)}{v}(t,\mu) \| \leqslant c\,\mu^{n+1},\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 < \mu \leqslant \mu_0; \tag{3.107}$$

而根据 S_1 和 S_2 的第二条性质, 由 (3.106) 可得

$$\begin{cases} \| \overset{(k+1)}{u}(t,\mu) - \overset{(k)}{u}(t,\mu) \| \leqslant \varepsilon \max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} \Big[\| \overset{(k)}{u}(s,\mu) - \overset{(k-1)}{u}(s,\mu) \| \\ \qquad\qquad + \| \overset{(k)}{v}(s,\mu) - \overset{(k-1)}{v}(s,\mu) \| \Big], \\ \| \overset{(k+1)}{v}(t,\mu) - \overset{(k)}{v}(t,\mu) \| \leqslant cT \max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} \| \overset{(k)}{u}(s,\mu) - \overset{(k-1)}{u}(s,\mu) \| \\ \qquad\qquad + \varepsilon \max\limits_{0\leqslant s\leqslant t} \Big[\| \overset{(k)}{u}(s,\mu) - \overset{(k-1)}{u}(s,\mu) \| \\ \qquad\qquad + \| \overset{(k)}{v}(s,\mu) - \overset{(k-1)}{u}(s,\mu) \| \Big], \end{cases} \tag{3.108}$$

于是如果 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_0(\varepsilon)$, 就有

$$\begin{aligned} &\| \overset{(k-1)}{u}(s,\mu) \| \leqslant \delta(\varepsilon), \quad && \| \overset{(k)}{u}(s,\mu) \| \leqslant \delta(\varepsilon), \\ &\| \overset{(k-1)}{v}(s,\mu) \| \leqslant \delta(\varepsilon), \quad && \| \overset{(k)}{v}(s,\mu) \| \leqslant \delta(\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.109}$$

令 $a = \max\,(4cT,\, 1)$ 以及

$$D_{k+1} = \max_{0\leqslant t\leqslant T} \Big[a\, \| \overset{(k+1)}{u}(t,\mu) - \overset{(k)}{u}(t,\mu) \| + \| \overset{(k+1)}{v}(t,\mu) - \overset{(k)}{v}(t,\mu) \| \Big].$$

于是由 (3.108) 有 $D_{k+1} \leqslant \dfrac{D_k}{4} + \varepsilon(1+a)D_k$. 由于 ε 可任意小, 因此取它满足不等式: $\varepsilon(1+a) \leqslant 1/4$; 从而在满足不等式 (3.109) 的条件下有

$$D_{k+1} \leqslant \frac{D_k}{2}. \tag{3.110}$$

我们证明当 $\mu \in (0, \mu_0]$ 充分小时, 不等式 (3.109), 从而 (3.110) 对所有的 $k = 1, 2, \cdots$, 都成立. 为此我们利用估计式 (3.107), 并取 $\mu_0 \leqslant \mu_0(\varepsilon)$ 充分小, 使得当 $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时满足不等式

$$D_1 = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left[a \parallel \overset{(1)}{u} (t,\mu) + \overset{(1)}{v} (t,\mu) \parallel \right] \leqslant c(1+a)\mu^{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\delta(\varepsilon); \tag{3.111}$$

于是当 $k = 1$ 时有 (3.109) 成立, 从而 (3.110) 也成立. 其次假设 (3.110) 对 $k = 1, 2, \cdots, l-1$ 都成立, 那么有

$$D_{k+1} \leqslant \frac{1}{2} D_k \leqslant \frac{1}{2^2} D_{k-1} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{2^k} D_1, \quad k = 1, 2, \cdots, l-1.$$

由此得出, 当 $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时有

$$\begin{aligned} \|\overset{(l)}{u}\| &\leqslant \|\overset{(l)}{u} - \overset{(l-1)}{u}\| + \|\overset{(l-1)}{u} - \overset{(l-2)}{u}\| + \cdots + \|\overset{(1)}{u}\| \leqslant D_l + D_{l-1} + \cdots + D_1 \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2^{l-1}} + \frac{1}{2^{l-2}} + \cdots + \frac{1}{2} + 1 \right) \leqslant 2D_1 \leqslant \delta(\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.112}$$

类似可得

$$\|\overset{(l)}{v}\| \leqslant \delta(\varepsilon), \quad \|\overset{(l-1)}{u}\| \leqslant \delta(\varepsilon), \quad \|\overset{(l-1)}{v}\| \leqslant \delta(\varepsilon), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad 0 < \mu \leqslant \mu_0;$$

亦即 (3.109) 在当 $k = l$ 时成立, 从而不等式 (3.110) 当 $k = l$ 时也成立. 因此对于选定的 μ_0, 当 $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时对所有的 $k = 1, 2, \cdots$, 不等式 (3.110) 都是正确的. 由此不等式即得逐次逼近序列 $\left\{ \overset{(k)}{u} (t,\mu) \right\}$, $\left\{ \overset{(k)}{v} (t,\mu) \right\}$ 当 $k \to +\infty$ 时对 $t \in [0, T]$ 的一致收敛性, 这就证明了方程组 (3.103), (3.104) 的解 $u(t,\mu)$, $v(t,\mu)$ 存在性.

为了证明解的唯一性, 只需注意到 (3.85) 右端对 u 和 v 满足 Lipschitz 条件即可.

根据 (3.112), 所有逐次近似 $\overset{(k)}{u} (t,\mu)$ 都满足不等式 $\|\overset{(k)}{u} (t,\mu)\| \leqslant 2D_1$, $k = 1, 2, \cdots$; 且类似地有 $\|\overset{(k)}{v} (t,\mu)\| \leqslant 2D_1$, $k = 1, 2, \cdots$; 所以解 $u(t,\mu), v(t,\mu)$ 满足同样的不等式, 由此及 (3.111) 即知: 对 $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 有

$$\| u(t,\mu) \| \leqslant c\mu^{n+1}, \quad \| v(t,\mu) \| \leqslant c\mu^{n+1}.$$

这就是估计式 (3.105), 从而定理 3.1 得证. □

5. 引理 3.2 的证明 我们将 (3.98) 重新写成

$$\mu \frac{dW}{dt} = A(p)W + [A(t) - A(p)]W, \quad W(s,s,\mu) = E_M; \tag{3.113}$$

其中 p 为区间 $[0, T]$ 中任一确定的值. 根据 (3.54), (3.55) 以及 (3.113) 即得

$$\begin{aligned} W(t,s,\mu) &= \exp\Big(\frac{1}{\mu}A(p)(t-s)\Big) \\ &\quad + \int_s^t \frac{1}{\mu}\exp\Big(\frac{1}{\mu}A(p)(t-q)\Big)[A(q)-A(p)]W(q,s,\mu)dq. \end{aligned} \tag{3.114}$$

对于任给的 $p \in [0, T]$, 方程 (3.114) 与 (3.113) 等价; 特别令 $p = t$ 即得

$$\begin{aligned} W(t,s,\mu) &= \exp\Big(\frac{1}{\mu}A(t)(t-s)\Big) \\ &\quad + \int_s^t \frac{1}{\mu}\exp\Big(\frac{1}{\mu}A(t)(t-q)\Big)[A(q)-A(t)]W(q,s,\mu)dq. \end{aligned} \tag{3.115}$$

对于 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, 令

$$\| W(t,s,\mu) \| \exp\Big(\frac{\sigma}{\mu}(t-s)\Big) = \omega(t,s,\mu). \tag{3.116}$$

将 (3.115) 的两边都乘以 $\exp\Big(\frac{\sigma}{\mu}(t-s)\Big)$; 由于 (3.97) 和 (3.56), 故当 $t \geqslant 0$ 时有不等式 $\|\exp(At)\| \leqslant c\exp(-2\sigma t)$, 得

$$\begin{aligned} \omega(t,s,\mu) &\leqslant c\exp\Big(-\frac{\sigma}{\mu}(t-s)\Big) + \frac{c}{\mu}\exp\Big(-\frac{\sigma}{\mu}(t-s)\Big) \\ &\quad \times \int_s^t \exp\Big(-\frac{2\sigma}{\mu}(t-s)\Big) \| A(q)-A(t) \| \exp\Big(-\frac{\sigma}{\mu}(q-s)\Big)\omega(q,s,\mu)dq, \end{aligned}$$

或者

$$\omega(t,s,\mu) \leqslant c + \frac{c}{\mu}\int_s^t \exp\Big(-\frac{\sigma}{\mu}(t-q)\Big) \| A(q)-A(t) \| \omega(q,s,\mu)dq. \tag{3.117}$$

对于固定的 μ, 令 $M = \max\limits_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T}\omega(t,s,\mu)$; 于是由 (3.117) 得

$$M \leqslant c + \frac{c}{\mu}M\Big(\max_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T} J\Big), \tag{3.118}$$

其中 $J = \int_s^t \exp\Big(-\frac{\sigma}{\mu}(t-q)\Big) \| A(q)-A(t) \| dq$. 令

$$\varepsilon(\mu) = \max_{0\leqslant t-\sqrt{\mu}\leqslant q\leqslant t\leqslant T} \| A(q)-A(t) \| .$$

由于 $A(t)$ 的连续性, 故当 $\mu \to 0$ 时有 $\varepsilon(\mu) \to 0$. 如果 $t-s \leqslant \sqrt{\mu}$, 则有 $\|A(q)-A(t)\| \leqslant \varepsilon(\mu)$, 从而

$$J \leqslant \varepsilon(\mu)\int_s^t \exp\Big(-\frac{\sigma}{\mu}(t-q)\Big)dq \leqslant \frac{\varepsilon(\mu)\mu}{\sigma}\Big[1-\exp\Big(-\frac{\sigma}{\mu}(t-s)\Big)\Big] \leqslant \frac{\varepsilon(\mu)\mu}{\sigma}.$$

如果 $t-s>\sqrt{\mu}$, 则 $J=J_1+J_2$, 这里

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_s^{t-\sqrt{\mu}} \exp\Big(-\frac{\sigma}{\mu}(t-q)\Big)\parallel A(q)-A(t)\parallel dq \\
&\leqslant c\int_s^{t-\sqrt{\mu}} \exp\Big(-\frac{\sigma}{\mu}(t-q)\Big)dq \\
&= \frac{c\mu}{\sigma}\Big[\exp\Big(-\frac{\sigma}{\sqrt{\mu}}\Big)-\exp\Big(-\frac{\sigma}{\mu}(t-s)\Big)\Big]\leqslant c\mu\exp\Big(-\frac{\sigma}{\sqrt{\mu}}\Big), \\
J_2 &= \int_{t-\sqrt{\mu}}^{t} \exp\Big(-\frac{\sigma}{\mu}(t-q)\Big)\parallel A(q)-A(t)\parallel dq \\
&\leqslant \varepsilon(\mu)\int_{t-\sqrt{\mu}}^{t} \exp\Big(-\frac{\sigma}{\mu}(t-q)\Big)dq\leqslant\frac{\varepsilon(\mu)\mu}{\sigma}.
\end{aligned}$$

从得到的不等式推出

$$\max_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant T} J\leqslant\mu\Big[\frac{\varepsilon(\mu)}{\sigma}+c\exp\Big(-\frac{\sigma}{\sqrt{\mu}}\Big)\Big].$$

取 μ_0 充分小, 使得当 $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时有不等式

$$c\Big[\frac{\varepsilon(\mu)}{\sigma}+c\exp\Big(-\frac{\sigma}{\sqrt{\mu}}\Big)\Big]\leqslant\frac{1}{2}$$

成立. 于是从 (3.118) 即得 $M\leqslant c+M/2$ 从而 $M\leqslant 2c$, 因此由 (3.116) 即得

$$\parallel W(t,s,\mu)\parallel\leqslant c\exp\Big(-\frac{\sigma}{\mu}(t-s)\Big),\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\quad 0<\mu\leqslant\mu_0.$$

引理3.2证毕. □

§11. 某些注记和推广

在前节我们得到了初值问题 (3.18), (3.19) 解的渐近展开式 (3.24) ~ (3.26). 在那里我们取 $t=0$ 作为初始点, 因此所得到的展开式对 $t\geqslant 0$ 成立.

1. 当选取 $t_0\neq 0$ 作为初始点的时候, 上述结果仍然正确, 但应当用 $z(t_0,\mu)=z^0$, $y(t_0,\mu)=y^0$ 来代替 (3.19). 显然, 只要在前面的讨论中对自变量 t 做简单的平移, 就可以得到这种情形的结果. 由构造 (3.24) ~ (3.26) 的算法看出, 这就表示这时在 (3.26) 中的 τ 应等于 $\dfrac{t-t_0}{\mu}$, 而在 (3.32), (3.34) 和 (3.37) 中出现的量 $t,\overline{z}_k(t),\overline{y}_k(t)$ 不应当在 $t=0$ 而必须在 $t=t_0$ 处取值; 最后, 初始条件 (3.40), (3.47) 和 (3.49) 不应当给在 $t=0$ 而是在 $t=t_0$.

2. 我们是在条件 (3.22) 之下证明了渐近展开式 (3.24) ~ (3.26) 的正确性的. 如果在 (3.22) 中满足的是相反符号的不等式

$$\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}_i(t)>0,\quad 0\leqslant t\leqslant T,\quad i=1,2,\cdots,M; \tag{3.119}$$

那么可把得到的结果用明显的办法加以相应的改变. 条件 (3.119) 称为*左稳定条件*, 而这时的根 $z=\varphi(y,t)$ 称为*左稳定根*. 相反, 条件 (3.22) 称为*右稳定条件*, 而根 $z=\varphi(y,t)$ 称为*右稳定根*. 这些术语将在第四章中使用.

当满足条件 (3.119) 时, 应该在 $t=T$ 处给出初始条件, 而不是在 $t=0$, 并且从初始点向左延拓所论的解. 这时利用从 t 到 $T-t$ 的简单变换, 可将问题化成满足定理3.1条件的问题. 若直接讨论这个问题, 则在描述构造 (3.24) ~ (3.26) 的算法时, 除了上段指出的那些变动 $(t_0=T)$ 之外, 还应当在反常积分 (例如在 (3.49)) 中用 $-\infty$ 代替 ∞, 因为 $\tau=\dfrac{t-T}{\mu}<0$. 此外, 由于这时边界层是出现在区间的右端点, 因此今后我们将采用符号 Q 而不采用 Π 来表示在右端的边界函数. 至于确定 Q 函数的方程是与确定 Π 函数的方程完全一样的, 只是这时应在 $\tau\leqslant 0$ 上进行讨论. 在这些条件之下, 可将 (3.49) 写成

$$\overline{y}_k(T)=\int_0^{-\infty}Q_{k-1}f(s)ds,\quad k=1,2,\cdots.\tag{3.120}$$

3. 展开式 (3.24) ~ (3.26) 是在初值 z^0,y^0 不依赖于 μ 的条件下得到的. 现在假设 z^0,y^0 依赖于 μ, 而且还假设它们关于 μ 有级数形式的渐近展开式

$$x^0=x^0(\mu)=x_0+\mu x_1+\cdots+\mu^k x_k+\cdots.\tag{3.121}$$

在研究边值问题时 (参看第四章), 这种情况起了重要作用. 这时定理3.1的证明不必做任何实质性的改变即可通过; 至于渐近构造算法本身的区别仅在于用

$$\overline{y}_0(0)=y_0,\tag{3.122}$$

$$\overline{y}_k(0)=y_k+\int_0^{+\infty}\Pi_{k-1}f(s)ds,\quad k=1,2,\cdots,\tag{3.123}$$

代替 (3.40), (3.47) 和 (3.49), 以及用

$$\Pi_k z(0)=z_k-\overline{z}_k(0),\quad k=0,1,2,\cdots,\tag{3.124}$$

代替 (3.42), (3.48) 和 (3.50).

4. 渐近展开式 (3.24) ~ (3.26) 的余项在整个区间 $0\leqslant t\leqslant T$ 上有一致的估计式(3.52). 我们注意到, 如果取区间为 $0<\bar{t}_0\leqslant t\leqslant T$, 这里 $\bar{t}_0$ 可任意小, 但当 $\mu\to 0$ 时为固定的数; 那么我们可以用正则部分 (3.25) 作为解的渐近近似, 且已经有同样的精确度, 亦即当 $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时有

$$\|\, x(t,\mu)-(\overline{x}_0(t)+\mu\overline{x}_1(t)+\cdots+\mu^n\overline{x}_n(t))\,\|\leqslant c\mu^{n+1},$$

对 $\bar{t}_0\leqslant t\leqslant T$ 一致成立. 这可以直接从对 Π 函数的估计式 (3.58) 得到.

5. 如果方程组 (3.18) 的右端 F 和 f 还依赖于参数 μ:

$$F = F(z, y, t, \mu), \quad f = f(z, y, t, \mu),$$

而且这种依赖性是正则的, 以及矩阵 $F_z(\varphi(\overline{y}(t), t), \overline{y}(t), t, 0)$ 的特征值 $\overline{\lambda}_i(t)$ 仍然满足条件 (3.22), 这里 $\overline{z}(t) = \varphi(\overline{y}(t), t)$, $\overline{y}(t)$ 是退化方程组

$$0 = F(\overline{z}, \overline{y}, t, 0), \quad \frac{d\overline{y}}{dt} = f(\overline{z}, \overline{y}, t, 0), \quad \overline{y}(0) = y^0$$

的解. 那么只要对决定展开式 (3.25), (3.26) 系数的方程用明显的办法加以相应的改变, 定理 3.1 的证明无需做任何的变更即可通过.

6. 在某些问题的研究中 (例如在第四章), 方程组 (3.18) 的解必须看成是初值 z^0, y^0 的函数. 容易看出, 如果 x^0 属于某个闭区域 P, 而且对于每个 $x^0 \in P$ 都满足定理 3.1 的条件 V, 那么估计式 (3.52) 就具有关于 $x^0 \in P$ 的一致性, 即 c 和 μ_0 均与 $x^0 \in P$ 无关.

第四章　边值问题

§12. 引论

在上章我们已仔细地讨论了初值问题 (3.18), (3.19) 渐近解的构造. 但对 (3.18) 还可以提出更为复杂的定解条件; 例如经常要遇到的有两点边值问题和多点问题、变动边界问题以及其他问题.

一类相当一般形式的定解条件可以写成

$$R(x)=0, \tag{4.1}$$

这里 R 是 $(M+m)$ 维向量, 它的每个分量都是 x 的泛函.

根据上章的论述, 构造这个问题渐近解的最简单过程可叙述如下: 把求解问题 (3.18), (4.1) 看成是求解初值问题 (3.18), (3.19), 不过这时的初值 $x^0(\mu)$ 应当看成是未知的, 但可以写成 μ 的展开式

$$x(0,\mu)=x^0(\mu)=x_0+\mu x_1+\cdots+\mu^k x_k+\cdots, \tag{4.2}$$

其中 x_k 暂时为未知的待定参数.

首先对问题 (3.18), (4.2) 构造级数解 (3.24) ~ (3.26)(参看第二章 §11 中的第 3 段). 其次把它们作为精确解代入 (4.1), 然后将得到的 (4.1) 式左端对 μ 展开成幂级数

$$R(\overline{x}_0+\mu\overline{x}_1+\cdots+\Pi_0 x+\mu\Pi_1 x+\cdots)=R_0+\mu R_1+\cdots=0;$$

由此比较两端关于 μ 的同次幂系数即得

$$R_k=0,\quad k=0,1,2,\cdots. \tag{4.3}$$

由于 R_k 依赖于展开式 (4.2) 的系数, 所以方程 (4.3) 就成为确定系数 x_k 的方程. 不难相信, 这样构造的展开式 (3.24)—(3.26) 是初值问题 (3.18), (4.2) 解的渐近展开式, 因而也将是问题 (3.18), (4.1) 解的渐近展开式.

这就是把第三章的结果应用到解决条件比初始条件更为复杂问题时的基本思想. 本章的 §13 就是根据这个思想构造出方程组 (3.18) 两点边值问题的渐近解, 而且同时研究了它的存在性和唯一性问题. 这一节还讨论了如何把这些设想用来解决多点问题、变动边界问题以及其他问题.

但应当注意的是在这个过程中, 我们事先给定了问题 (3.18), (4.1) 渐近解的形式, 即预先假定这个解在 $t=0$ 的邻域有边界层. 当方程 $F(z,y,t)=0$ 有右稳定根 $z=\varphi(y,t)$ 时, 这种想法是很自然的. 倘若方程 $F(z,y,t)=0$ 有左稳定根, 那么对同一个问题 (3.18), (4.1) 自然是找它在区间右端点具有边界层的解. 这种情况可以利用前面提到的自变量简单替换, 因此不必进行专门研究. 如果方程 $F(z,y,t)=0$ 有几个根, 其中既有右稳定根, 又有左稳定根, 那么在左端有边界层的解与在右端有边界层的解可能同时存在. 确切地说, 可能同时存在几个解, 其中每个解的边界层就出现在两个端点中之一. 这种例子在本章的 §13 中第二段给出.

但是, 利用奇摄动初值问题的结果来研究奇摄动边值问题的可能性却不止这一些. 无论方程 $F(z,y,t)=0$ 有右稳定根还是有左稳定根, 都可能存在这样一种边值问题, 即初始点 t_0 位于所考虑区间*内部*的初值问题. 解在 t_0 处的值就像前面那样可以表示成 (4.2) 的形式, 而 t_0 本身位于区间内部的什么地方也是事先不知道的. 在这种初始条件下, 同样可以构造 (3.24) ~ (3.26) 形式的渐近展开式, 而且当构造 t_0 左端的解时利用方程 $F(z,y,t)=0$ 的左稳定根, 而在构造 t_0 右端的解时, 利用方程的右稳定根. 将这些展开式代入 (4.1), 可得决定 t_0 和系数 x_i 的方程. 可以期望用这种方法对初始数据为 $(x^0,\ t_0)$ 、且在 t_0 邻域有边界层的初值问题所构造的展开式是问题 (3.18), (4.1) 某个解的渐近展开式. 在本章的 §15 中证明了两点边值问题存在具有刚才所描述的渐近性质的解, 亦即存在边界层在 t_0 邻域的解. 由于 t_0 位于给定区间的内部, 所以这种边界层又称为*内部边界层*.

上面谈到的把求解边值问题变成求解具有 (3.24) 渐近展开式的初值问题的思想, 很可惜只允许研究相当有限的一类问题 (尽管初始点既可以取在区间的端点, 也可以取在它的内部, 而且对问题 (3.18), (4.1) 构造出来的解也具有不同的渐近性质) . 实际上, 在这个过程中, 要求方程 $F(z,y,t)=0$ 存在右稳定或左稳定根, 而且只有这两种根才能用于形如 (3.24) 渐近展开式的构造.

但是, 正如我们在第一章中所看到的, 当方程 $F(z,y,t)=0$ 的根既不是右稳定根也不是左稳定根时, 亦即其特征方程的根具有不同符号的实部 (见 (1.18)), 这时边值问题 (见 (1.14), (1.19)) 的解也可以有完全确定的极限. 显然, 为了构造这种问题解的渐近展开式, 无论上述方法中的哪一个都不适用于这种边值问题的研究, 更不能依靠第三章的结果, 而需要提出某种新方法.

在本章的 §14 中我们将对方程 $F(z,y,t)=0$ 的根是条件稳定时给出两点边值问题解的存在性证明和构造渐近解的方法, 这里所谓条件稳定是指相应的特征值 λ_i 有不同符号的实部. 值得注意的是这时构造的渐近解从形式上看仍然是从第三章发展起来的, 不过较为复杂而已, 因为这时边界层既出现在区间的左端点, 也出现在区间的右端点, 且与第三章相比, 边界函数也有所不同.

在条件稳定根的研究中, 引进和构造形如 (3.24) 的双边界层展开式极大地扩展了可以构造渐近解的 (3.18), (4.1) 问题类. 特别在本章的 §15 中讨论了在区间 [0, 1] 的某些内点处出现边界层问题的解.

在上面所讨论的情形中, 我们都假设: 对于每一个自变量的值, 解都可以表示成 μ 的 (4.2) 类型的幂级数形式. 但却可能存在不满足这种假设的情况. 在 §16 中就给出了一些边值问题的简单例子, 它们并不满足所述的假设, 亦即当 $\mu\to 0$ 时, 在点 $t-0$ 处的值 z 趋于无限. 是否可以将第三章和本章 §13 所描述的构造也推广到适用于这种情形呢? 结果是: 如果方程 (3.18) 中的函数关于 z 是线性的, 那么当 (4.2) 中出现 μ 的负幂时也可以构造初值问题渐近解的结果, 补充和扩大了可以构造渐近解的边值问题的范围. 这类问题也将在本章 §16 中进行讨论.

这就是将在本章研究的边值问题渐近解方法的概述.

§13. 单边界层的边值问题

一、两点边值问题及其渐近解的构造方法 我们在区间 $[0\leqslant t\leqslant 1]$ 上考虑方程组

$$\mu\frac{dz}{dt}=F(z,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,y,t); \tag{4.4}$$

其中 z 和 F 为 M 维向量, y 和 f 为 m 维向量函数; 而给定的边界条件为

$$R(x(0,\mu),x(1,\mu))=0; \tag{4.5}$$

这里 R 是 $(M+m)$ 维的向量函数.

我们将证明, 在一定条件下, 边值问题 (4.4), (4.5) 有边界层在点 $t=0$ 邻域的解, 而且我们构造出这个解的渐近展开 (边界问题的这种类型在 [14] 中研究过.)

为此我们将分成几步进行讨论. 首先按照上节指出的方法构造 (3.24) ~ (3.26) 类型的级数, 它们是辅助初值问题解的渐近展开式. 其次证明在此展开式主项邻域中, 确实存在问题 (4.4), (4.5) 的解, 而且这个展开式就是该解的渐近展开式.

在进行构造的过程中, 我们将逐步地对 (4.4) 的右端加上某些条件, 像在前面那样, 我们按 I, II, $\cdots$, 编上号码.

I. *设方程 $F(z,y,t)=0$ 有根 $z=\varphi(y,t)$, 它在 (y,t) 空间的某个区域 D 中有定义、且是孤立的.*

如上节所述, 我们在 $t=0$ 处给定初始条件

$$x(0,\mu)=x^0(\mu)=x_0+\mu x_1+\cdots+\mu^k x_k+\cdots, \tag{4.6}$$

其中 x_k, $k=0,1,\cdots$, 为暂时未知的待定参数. 我们按照公式 (3.24) ~ (3.26) 写出初值问题 (4.4), (4.6) 的渐近解

$$\begin{aligned} x(t,\mu)&=\overline{x}(t,\mu)+\Pi x(\tau,\mu)\\ &=\overline{x}_0(t)+\mu\overline{x}_1(t)+\cdots+\Pi_0 x(\tau)+\mu\Pi_1 x(\tau)+\cdots. \end{aligned} \tag{4.7}$$

显然, 在这个展开式中含有 (4.6) 的参数 x_k : $\overline{x}_0(t)$ 中只含有参数 y_0, 因为 $\overline{x}_0(t)$ 是由方程组 (见 (3.31))

$$\frac{d\overline{y}_0}{dt}=f(\overline{z}_0,\overline{y}_0,t),\quad \overline{z}_0=\varphi(\overline{y}_0,t), \tag{4.8}$$

及初始条件 (见 (3.122))

$$\overline{y}_0(0)=y_0, \tag{4.9}$$

所决定. 其次, $\overline{x}_1(t)$ 不仅依赖于参数 y_1, 还依赖于 y_0, z_0; 这是因为 (见 (3.33), (3.123))

$$\frac{d\overline{z}_0}{dt}=\overline{F}_z(t)\overline{z}_1+\overline{F}_y(t)\overline{y}_1,\quad \frac{\overline{y}_1}{dt}=\overline{f}_z(t)\overline{z}_1+\overline{f}_y(t)\overline{y}_1; \tag{4.10}$$

$$\overline{y}_1(0)=y_1+\int_0^\infty \Pi_0 f(\tau)d\tau. \tag{4.11}$$

不难看出, $\overline{x}_1(t)$ 对 y_0 和 z_0 的依赖性是通过 (4.10) 右端的系数、$\frac{d\overline{z}_0}{dt}$ 以及 (4.11) 右端的积分来实现的 (见 (3.34), (3.43) 和 (3.124)), 而对 y_1 的依赖性 (正是这个依赖性对后面的讨论有用) 是由于 y_1 线性地出现在 (4.11) 右端. 一般来说, 由方程组 (见 (3.36))

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{z}_{k-1}}{dt}=\overline{F}_z(t)\overline{z}_k+\overline{F}_y(t)\overline{y}_k+F_k(t),\\ \dfrac{d\overline{y}_k}{dt}=\overline{f}_z(t)\overline{z}_k+\overline{f}_y(t)\overline{y}_k+f_k(t); \end{cases} \tag{4.12}$$

所决定的 $\overline{x}_k(t)$ 是通过初始条件 (见 (3.123))

$$\overline{y}_k(0)=y_k+\int_0^\infty \Pi_{k-1}f(\tau)d\tau \tag{4.13}$$

而线性地依赖于 y_k (以及也还依赖于 x_i, $i<k$).

为了求出展开式 (4.7) 中所有的项, 需要知道参数 x_k, $k=0,1,2,\cdots$, 我们现在就来说明如何逐次确定它们. 为此将 (4.7) 代入 (4.5), 然后把得到的 (4.5) 也对 μ 展开. 这时应当考虑到 $x(1,\mu)=\overline{x}(1,\mu)$, 因为项 $\Pi_k x(\frac{t}{\mu})$ 当 $t=1$ 时是指数式衰减的, 从而可以忽略, 这是由于它的量阶是比 μ 的任何幂次都高的无穷小量 (参看第三章 §11 第 4 段). 至于 $x(0,\mu)$, 则有 $x(0,\mu)=x^0(\mu)$, 这是由公式 (4.6) 给出的. 因此有

$$R(x^0(\mu),\overline{x}(1,\mu))=R_0+\mu R_1+\cdots+\mu^k R_k+\cdots=0; \tag{4.14}$$

由此得出

$$R_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{4.15}$$

当 $k = 0$ 时有

$$R_0 \overset{\text{def}}{=} R(x_0, \overline{x}_0(1)) = 0. \tag{4.16}$$

在这 $M + m$ 个方程中，可以将 x_0 的 $M + m$ 个分量看成未知数，因为从 (4.8), (4.9) 可知 $\overline{x}_0(1)$ 也是 y_0 的已知函数 (我们总假设问题 (4.8), (4.9) 对 y_0 在其变化区间中的任一点都有在区间 [0, 1] 上有定义的解) .

II. 设方程 (4.16) 关于 x_0 有解 $x_0 = x_0^0$，且函数行列式

$$\left[\frac{D(R_0)}{D(x_0)}\right]\Bigg|_{x_0=x_0^0} \overset{\text{def}}{=} \Delta_0(x_0)\Big|_{x_0=x_0^0} \overset{\text{def}}{=} \Delta_0^0 \neq 0. \tag{4.17}$$

求出 x_0^0 后，就可以从 (4.8), (4.9) 解出 $\overline{x}_0(t)$；然后从 (3.34), (3.124) 求出 $\Pi_0 z(\tau)$ $(\Pi_0 y(\tau) \equiv 0)$.

III. 设当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时有 $(\overline{y}_0(t), t) \in D($ 见 I).

IV. 设矩阵 $\overline{F}_z(t) \overset{\triangle}{=} F_z(\overline{z}_0(t), \overline{y}_0(t), t)$ 的特征值 $\overline{\lambda}_i(t)$ 满足右稳定条件 (见 §11 第 2 段)

$$\operatorname{Re} \overline{\lambda}_i(t) < 0, \text{ 当 } 0 \leqslant t \leqslant 1, \ i = 1, \cdots, M. \tag{4.18}$$

V. 设值 z_0^0 属于附加方程组 $\dfrac{d\widetilde{z}}{d\tau} = F(\widetilde{z}, y_0^0, 0)$ 的奇点 $\widetilde{z} = \varphi(y_0^0, 0)$ 的影响域 (见 (2.24)) .

我们现在考虑 (4.15) 中 $k = 1$ 的方程组

$$R_1 \equiv R_1(x_0^0) x_1 + R_2(x_0^0) \overline{x}_1(1) = 0, \tag{4.19}$$

其中 R_1 表示 R 的分量对 $x(0, \mu)$ 分量的导数矩阵，R_2 表示 R 的分量对 $x(1, \mu)$ 分量的导数矩阵. 对 $i = 1, 2$, $R_i(x_0^0)$ 为 $R_i(x_0, \overline{x}_0(1, x_0))\big|_{x_0=x_0^0}$ 的简写，这里 $\overline{x}_0(1, x_0)$ 是问题 (4.8), (4.9) 的解在 $t = 1$ 的值 (通常在退化方程组的解中，我们并不指明它对初值的依赖性，但对现在讨论的问题，这却是很重要的).

在方程 (4.19) 中，将分量 x_1 看成未知量；于是不难看出方程组 (4.19) 关于 x_1 是线性的，这是因为关于 $\overline{x}_1(t)$ 的方程组 (4.10) 是线性的，而且初始条件 (4.11) 对 y_1 也是线性的. 可以证明，线性方程组 (4.19) 中 x_1 的系数行列式与 Δ_0^0 是完全一样的. 实际上，对应于 Δ_0^0 的矩阵有如下形式

$$R_1(x_0^0) + R_2(x_0^0) \frac{\partial \overline{x}_0(1, x_0)}{\partial x_0}\Big|_{x_0=x_0^0}, \tag{4.20}$$

(记号 $R_1(x_0^0), R_2(x_0^0)$ 与 (4.19) 相同) 而方程组 (4.19) 中 x_1 的系数矩阵为

$$R_1(x_0^0)+R_2(x_0^0)\frac{\partial\overline{x}_1(1,x_1)}{\partial x_1}. \tag{4.21}$$

在 (4.20) 中的矩阵 $\dfrac{\partial\overline{x}_0(1,x_0)}{\partial x_0}$ 可以从 (4.8) 两边直接对 x_0 求导得到的方程组求出, 这个方程组就是 (4.8) 关于退化解的变分方程组. 显然这时 $\overline{x}_0$ 与 z_0 无关, 因此有

$$\frac{\partial\overline{x}_0}{\partial z_0}(t,x_0)\equiv 0, \tag{4.22}$$

而 $\dfrac{\partial\overline{x}_0(t,x_0)}{\partial y_0}$ 是由方程组

$$\begin{cases} 0=\overline{F}_z(t)\dfrac{\partial\overline{z}_0}{\partial y_0}+\overline{F}_y(t)\dfrac{\partial\overline{y}_0}{\partial y_0}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial\overline{y}_0}{\partial y_0}\right)=\overline{f}_z(t)\dfrac{\partial\overline{z}_0}{\partial y_0}+\overline{f}_y(t)\dfrac{\partial\overline{y}_0}{\partial y_0}, \end{cases} \tag{4.23}$$

及只对未知函数 "y" 给出的初始条件 (见 (4.9))

$$\frac{\partial\overline{y}_0(0,x_0)}{\partial y_0}=E_m \tag{4.24}$$

所决定 (E_m 为 $m\times m$ 单位方阵).

在 (4.21) 中的矩阵 $\dfrac{\partial\overline{x}_1(t,x_1)}{\partial x_1}$ 可用类似的办法从 (4.10), (4.11) 求出; 这时 $\dfrac{\partial\overline{x}_1(t,x_1)}{\partial z_1}\equiv 0$, 而关于 $\dfrac{\partial\overline{x}_1(t,x_1)}{\partial y_1}$ 的方程组则由 (4.10) 两边直接对 y_1 求导得到, 显然这与 (4.23) 完全一样. 至于 $\dfrac{\partial\overline{x}_1(t,x_1)}{\partial y_1}$ 的初始条件则由 (4.11) 两边直接对 y_1 求导得出, 易见这与 (4.24) 一样, 因此有

$$\frac{\partial\overline{x}_1(1,x_1)}{\partial x_1}=\left.\frac{\partial\overline{x}_0(1,x_0)}{\partial x_0}\right|_{x_0=x_0^0}.$$

总之, 方程组 (4.19) 中 x_1 的系数行列式实际上就是 Δ_0^0, 于是由条件II即知它关于 x_1 是可解的.

完全类似地可从方程组 $R_k=0$ 确定 x_k; 实际上, R_k 是 x_k 和 $\overline{x}_k(1)$ 的如下线性表达式

$$R_k\equiv R_1(x_0^0)x_k+R_2(x_0^0)\overline{x}_k(1)+r_k=0, \tag{4.25}$$

其中非齐次项 r_k 只依赖于 x_i, $i<k$. 显然, 在方程组 (4.25) 中, x_k 的系数矩阵与 (4.21) 的不同之处只是用 $\dfrac{\partial\overline{x}_k(1,x_k)}{\partial x_k}$ 代替 $\dfrac{\partial\overline{x}_1(1,x_1)}{\partial x_1}$ 而已. 因此像在 $k=0,1$ 那样,

我们有 $\dfrac{\partial \overline{x}_k(t,x_k)}{\partial z_k} \equiv 0$, 而 $\dfrac{\partial \overline{x}_k(t,x_k)}{\partial y_k}$ 则由 (4.12) 的变分方程组, 即如 (4.23) 那样的方程组所决定. 此外由 (4.13), 初始条件也与 (4.24) 一样; 从而由解的唯一性即知

$$\frac{\partial \overline{x}_k(1,x_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial \overline{x}_0(1,x_0)}{\partial x_0}\Big|_{x_0=x_0^0}.$$

总而言之, 我们可以逐步地确定 (4.6) 的所有参数和展开式 (4.7) 中所有项. 实际上, 这个展开式就是问题 (4.4), (4.5) 的解的渐近展开式, 它确实是存在的, 且在一定意义下是唯一的.

对于 (4.4) 右端及 $R(x(0,\mu),x(,\mu))$ 的可微性阶数, 我们补充一个如上章条件I类型的要求:

VI. *设 $F(z,y,t)$ 和 $f(z,y,t)$ 在曲线 L_0 的某 δ-管中有直到包括 $n+2$ 阶在内的连续偏导数, 而 $R(x(0,\mu),x(1,\mu))$ 在点 $(x_0^0,\overline{x}_0(1,x_0^0))$ 的邻域中也有直到包括 $n+2$ 阶在内的连续偏导数.*

这里 L_0 为在前两章中遇到过的同样曲线, 它由两个分支组成:

$$L_{01} = \{(z,y,t)|z = \overline{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau),\ \tau \geqslant 0,\ y = y_0^0;\ t = 0\},$$

$$L_{02} = \{(z,y,t)|z = \overline{z}_0(t), y = \overline{y}_0(t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}.$$

像在上一章那样, 我们用 $X_n(t,\mu)$ 表示展开式 (4.7) 的部分和, 于是有如下定理:

定理 4.1 *当满足条件I ~ VI 时, 存在常数 $\mu_0 > 0, \delta > 0$ 和 $c > 0$ 使得当 $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时, 在曲线 L_0 的 δ-管中存在问题 (4.4), (4.5) 的唯一解 $X(t,\mu)$, 且对 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 满足不等式*

$$\| X(t,\mu) - X_n(t,\mu) \| \leqslant c\mu^{n+1}. \tag{4.26}$$

注 1. 如果只考虑解的存在性和唯一性, 那么在条件 VI 中只须假设 $n=0$.

2. 由 (4.26) 得出

$$\lim_{\mu\to 0} Y(t,\mu) = \overline{y}_0(t), \quad 当 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

$$\lim_{\mu\to 0} Z(t,\mu) = \begin{cases} z_0^0, & 当 t = 0, \\ \overline{z}_0(t), & 当 0 < t \leqslant 1. \end{cases}$$

亦即所构造的解在 $t=0$ 的邻域中存在边界层. 于是若在条件 (4.18) 中把不等号改成相反, 而且在构造形式解的整个过程中把边界点 $t=0$ 与 $t=1$ 的作用相互对换, 那么我们可以得到边界层在 $t=1$ 邻域中的完全类似定理.

3. 当方程组 $F(z,y,t)=0$ 存在几个根, 或者 $R_0 = 0$ (见 (4.16)) 存在几个解时, 就可能存在几个在定理4.1 中所给出类型的解 (参看第二段结束前的例子) ; 这时解的边界层可能有的在左端, 有的在右端, 因此问题 (4.4), (4.5) 解的唯一性, 一般来说已不再成立.

二、定理 4.1 的证明　我们从找出这个证明所需要的某些关系式开始. 以 $x(t,\mu,x^0)$ 记方程组 (4.4) 满足初始条件 $x(0,\mu,x^0)=x^0$ 的解, 并将 $R(x^0,x(1,\mu,x^0))$ 看成 x^0 和 μ 的函数. 把行列式 $\dfrac{D(R)}{D(x^0)}$ 记作 $\Delta(x^0,\mu)$. 于是可以证明有渐近表达式

$$\Delta(x^0,\mu)=\Delta_0(x^0)+O(\mu) \tag{4.27}$$

成立. 其中 $\Delta_0(x^0)$ 为上面引用过的行列式 $\dfrac{D(R_0')}{D(x^0)}$ (见 (4.17)), 不过这时是用 x^0 代替原来的 x_0.

行列式 Δ 的元素为

$$R_1(x^0,x(1,\mu,x^0))+R_2(x^0,x(1,\mu,x^0))\frac{\partial x(1,\mu,x^0)}{\partial x^0}, \tag{4.28}$$

这里 R_i 的意义与 (4.19) 相同. 由第三章 §11 中第 4 和第 6 段的说明可知

$$x(1,\mu,x^0)=\overline{x}_0(1,x^0)+O(\mu), \tag{4.29}$$

其中 $\overline{x}_0(1,x^0)$ 为退化方程组 (4.8) 满足条件 $\overline{y}_0(0,x^0)=y^0$ 的解. 至于 $\dfrac{\partial x(t,\mu,x^0)}{\partial x^0}$, 它满足把 (4.4) 两边对 x^0 求导所得到的方程组

$$\begin{cases}\mu\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x^0}\right)=F_z(z,y,t)\frac{\partial z}{\partial x^0}+F_y(z,y,t)\frac{\partial y}{\partial x^0},\\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial y}{\partial x^0}\right)=f_z(z,y,t)\frac{\partial z}{\partial x^0}+f_y(z,y,t)\frac{\partial y}{\partial x^0};\end{cases} \tag{4.30}$$

及初始条件

$$\frac{\partial z(0,\mu,x^0)}{\partial x^0}=E_{M+m}.$$

方程组 (4.30) 与原来的 (4.4) 是属于同一类型的方程组, 只是前者的右端还含有 μ(系数通过 $x(t,\mu,x^0)$ 而依赖于 μ), 因此不能直接将第二章和第三章的结果用于 (4.30). 但是这个困难可以避免, 这只要把 (4.30) 与 (4.4) 联合起来看成一个整体. 不难相信, 这样的联合方程组满足第二章和第三章的所有条件 (建议读者把验证这个结论作为一个练习) . 因此根据第二章和第三章的结果有

$$\frac{\partial x(1,\mu,x^0)}{\partial x^0}=\overline{\left(\frac{\partial x}{\partial x^0}\right)_0}\Bigg|_{t=1}+O(\mu) \tag{4.31}$$

成立. 其中 $\overline{\left(\dfrac{\partial x}{\partial x^0}\right)_0}$ 为 (4.30) 的退化方程组的解, 下面我们总是用上面一横、下标为 0 的记号来表示它.

我们对 $\dfrac{\partial x}{\partial z^0}$ 和 $\dfrac{\partial x}{\partial y^0}$ 分别进行讨论. $\dfrac{\partial x}{\partial z^0}$ 满足方程组 (4.30) 和初始条件

$$\frac{\partial z(0,\mu,x^0)}{\partial z^0}=E_M,\quad \frac{\partial y(0,\mu,x^0)}{\partial z^0}=0;$$

不难看出其退化方程组与初始条件为

$$0=\overline{F}_z(t)\overline{\left(\frac{\partial z}{\partial z^0}\right)_0}+\overline{F}_y(t)\overline{\left(\frac{\partial y}{\partial z^0}\right)_0},$$

$$\frac{d}{dt}\overline{\left(\frac{\partial y}{\partial z^0}\right)_0}=\overline{f}_z(t)\overline{\left(\frac{\partial z}{\partial z^0}\right)_0}+\overline{f}_y(t)\overline{\left(\frac{\partial y}{\partial z^0}\right)_0},\quad \overline{\left(\frac{\partial y}{\partial z^0}\right)_0}\bigg|_{t=0}=0.$$

由此显然有

$$\overline{\left(\frac{\partial x}{\partial z^0}\right)_0}\equiv 0. \tag{4.32}$$

至于 $\dfrac{\partial x}{\partial y^0}$, 它满足与 (4.30) 一样的方程组及初始条件

$$\frac{\partial z(0,\mu,x^0)}{\partial y^0}=0,\quad \frac{\partial y(0,\mu,x^0)}{\partial y^0}=E_m;$$

因此有

$$\begin{aligned}&0=\overline{F}_z(t)\overline{\left(\frac{\partial z}{\partial y^0}\right)_0}+\overline{F}_y(t)\overline{\left(\frac{\partial y}{\partial y^0}\right)_0},\\&\frac{d}{dt}\overline{\left(\frac{\partial y}{\partial y^0}\right)_0}=\overline{f}_z(t)\overline{\left(\frac{\partial z}{\partial y^0}\right)_0}+\overline{f}_y(t)\overline{\left(\frac{\partial y}{\partial y^0}\right)_0},\quad \overline{\left(\frac{\partial y}{\partial y^0}\right)_0}\bigg|_{t=0}=E_m.\end{aligned} \tag{4.33}$$

把问题 (4.23), (4.24) 与问题 (4.33), 以及关系式 (4.22) 与 (4.32) 进行比较, 可以得出如下结论: $\dfrac{\partial \overline{x}_0(t,x_0)}{\partial x_0}$ 与 $\overline{\left(\dfrac{\partial x}{\partial x^0}\right)_0}$ 的差别只是变量的记号不同而已, 前者的变量为 x_0, 而后者记作 x^0; 因此有

$$\frac{\partial \overline{x}_0(t,x^0)}{\partial x^0}=\frac{\partial \overline{x}_0(t,x_0)}{\partial x_0}\bigg|_{x_0=x^0}=\overline{\left(\frac{\partial x}{\partial x^0}\right)_0}. \tag{4.34}$$

由 (4.29), (4.31) 和 (4.34) 可得 (4.28) 的如下渐近表达式

$$R_1(x^0,\overline{x}_0(1,x^0))+R_2(x^0,\overline{x}_0(1,x^0))\frac{\partial \overline{x}_0(1,x^0)}{\partial x^0}+O(\mu),$$

即渐近表达式 (4.27) 是正确的.

现在我们回到定理4.1的证明. 由 (4.17) 及 $R(x^0,\overline{x}_0(1,x^0))$ 的分量对 x^0 分量导数的连续性得出, 存在 $\delta>0$ 充分小, 使得 $\Delta_0(x^0)$ 在以 x_0^0 为中心, 以 δ 为半径的球 S_δ 内不为零, 即

$$\Delta_0(x^0)\neq 0,\quad 当\, x^0\in S_\delta; \tag{4.35}$$

于是由 (4.27), 当 $\mu\in(0,\mu_0]$ 充分小时有

$$\Delta(x^0,\mu)\neq 0,\quad 当\, x^0\in S_\delta. \tag{4.36}$$

我们考虑 $R(x^0,\overline{x}_0(1,x^0))$. 由于 (4.35), 可以在 R 的值空间中找出这样的区域 ϖ, 使得函数 $R=R(x^0,\overline{x}_0(1,x^0))$ 在 S_δ 与 ϖ 的点之间实现一一对应. 这时由于 x_0^0 本身的定义 (条件II), 亦即由于

$$R(x_0^0,\overline{x}_0(1,x_0^0))=0, \tag{4.37}$$

即知 x^0 空间的点 x_0^0 对应于 R 值空间中的点 $R=0$. 我们还注意到 S_δ 和 ϖ 都不依赖于 μ, 因而可以在 R 的值空间中找出这样一个以 $R=0$ 为中心且不依赖于 μ 的球 S_ε, 使得 $S_\varepsilon\subset\varpi$.

现在考虑 $R(x^0,x(1,\mu,x^0))$. 由于 (4.29) 我们有

$$R(x^0,x(1,\mu,x^0))=R(x^0,\overline{x}_0(1,x^0))+O(\mu); \tag{4.38}$$

于是从 (4.36) 得出, 在 R 值空间中存在区域 $\omega(\mu)$, 使得函数 $R=R(x^0,x(1,\mu,x^0))$ 在 S_δ 与 $\omega(\mu)$ 的点之间实现一一对应; 而且由 (4.38), $\omega(\mu)$ 的点相对于 ϖ 中对应点的移动不大于 $O(\mu)$, 亦即当 μ 充分小时有 $S_\varepsilon\subset\omega(\mu)$; 特别, 点 $R=0$ 必定被包含在 $\omega(\mu)$ 中. 因此在球 S_δ 中存在而且是唯一的值 $X^0(\mu)$, 使得

$$R(X^0(\mu),x(1,\mu,X^0(\mu)))=0.$$

这就意味着, 以 $X(0,\mu)=X^0(\mu)$ 为初始条件的方程组 (4.4) 的解 $X(t,\mu)$ 满足边界条件 (4.5), 亦即 $R(X(0,\mu),X(1,\mu))=0$. 于是为了证明定理关于解的存在唯一性结论, 只需再证当 $0<t\leqslant1$ 时, 解 $X(t,\mu)$ 仍留在 L_0 的 δ-管中即可; 而这直接从 (4.26) 当 $n=0$ 时得出, 如果我们能够证明 $X(t,\mu)$ 也满足这个不等式的话. 为此我们转到 (4.26) 的证明.

由于 (4.36) 以及 $R(x^0,x(1,\mu,x^0))$ 分量对 x^0 分量存在连续偏导, 因此 $R=R(x^0,x(1,\mu,x^0))$ 的反函数 $x^0=x^0(R,\mu)$ 在 $\omega(\mu)$ 上有定义且对 R 的分量连续可微; 又因为当 $x^0\in S_\delta$ 时有 $\left\|\dfrac{\partial R}{\partial x^0}\right\|\leqslant c$(见 (4.28), (4.29), (4.31)), 故由 (4.27) 即知当 $R\in\omega(\mu)$ 时有

$$\left\|\frac{\partial x^0(R,\mu)}{\partial R}\right\|\leqslant\frac{c}{d}, \tag{4.39}$$

其中 $d=\min\limits_{x^0\in S_\delta}\left|\Delta_0(x^0)\right|$. 考虑方程组 (4.4) 满足初始条件

$$x(0,\mu,x^0)=x_0^0 \tag{4.40}$$

的解. 由于 (4.38) 和 (4.37), 对于这个解有

$$R(x_0^0,x(1,\mu,x_0^0))=R(x_0^0,\overline{x}_0(1,x_0^0))+O(\mu)=O(\mu).$$

同时有 $R(X^0(\mu),x(1,\mu,X^0(\mu)))=0$, 由此及 (4.39) 即得

$$\| X^0(\mu)-x_0^0 \|\leqslant c\mu. \tag{4.41}$$

我们现在证明 (4.26). 首先考虑 $n=0$ 的情形. 把满足条件 $X(0,\mu)=X^0(\mu)$ 的边值问题的解 $X(t,\mu)$ 与满足初始条件 (4.40) 的解 $x(t,\mu,x_0^0)$ 进行比较, 由于方程组 (4.30) 的解 $\dfrac{\partial x(t,\mu,x^0)}{\partial x^0}$ 一致有界, 即 $\left\|\dfrac{\partial x(t,\mu,x^0)}{\partial x^0}\right\|\leqslant c$, 故由 (4.41) 有

$$\| X(t,\mu)-x(t,\mu,x_0^0) \| c\mu,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\quad 0<\mu\leqslant\mu_0. \tag{4.42}$$

另一方面, 对初值问题 (4.4), (4.40) 的解来说, $X_0(t,\mu)$ 是它的零次近似, 因此由第三章的结果即得

$$\| x(t,\mu,x_0^0)-X_0(t,\mu) \|\leqslant c\mu,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\quad 0<\mu\leqslant\mu_0. \tag{4.43}$$

于是由 (4.42) 和 (4.43) 推得当 $n=0$ 时的 (4.26).

为了得到对任意 n 的 (4.26) 式, 可进行如下: 代替 (4.40) 取初始条件为

$$x(0,\mu,(x^0)_n)=(x^0)_n \overset{\text{def}}{=} x_0^0+\mu x_1^0+\cdots+\mu^n x_n^0,$$

其中 x_k^0 是由上面的算法而确定的值. 用点 $(x^0)_n$ 代替 x_0^0, 并同样地进行所有的推理, 可以确信 $X^0(\mu)$ 满足不等式 (与 (4.41) 比较)

$$\| X^0(\mu)-(x^0)_n \|\leqslant c\mu^{n+1}, \tag{4.44}$$

这完全是由于表达式

$$R((x^0)_n, x(1,\mu,(x^0)_n))=R_0+\mu R_1+\cdots+\mu^n R_n+O(\mu^{n+1})=O(\mu^{n+1})$$

的结果; 同时还有

$$\| x(t,\mu,(x^0)_n)-X_n(t,\mu) \|\leqslant c\mu^{n+1}\quad 0\leqslant t\leqslant 1\quad 0<\mu\leqslant\mu_0.$$

由此及 (4.44) 即得对任意 n 的 (4.26) 式. 定理 4.1 证毕.

作为本段的结束, 我们考虑一个说明解的唯一性不成立的例子. 考虑边值问题

$$\begin{cases} \mu\dfrac{dz}{dt}=-(z-y-1)(z-y)(z-y+1), & \dfrac{dy}{dt}=z; \\ z(0)=0, \quad y(1)=0. \end{cases} \tag{4.45}$$

在此方程组中, $F(z,y,t)=0$ 有三个根: $\varphi_1=y+1$, $\varphi_2=y$, $\varphi_3=y-1$. 不难验证, φ_1 和 φ_3 都满足定理4.1的条件, 因此问题 (4.45) 有两个解.

我们在此只就 φ_1 进行验证. 为此取区域 D 为: $|y|<3$, $0\leqslant t\leqslant 1$. 显然在此区域中, 三个根 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 都是孤立的 (条件I) . 为了验证条件II, 我们求出问题 (4.8), (4.9) 的解 $\overline{x}_0(t)$, 即

$$\overline{y}_0(t)=(y_0+1)e^t-1,\quad \overline{z}_0(t)=(y_0+1)e^t.$$

这时方程组 (4.16) 成为 $z_0=0$ 和 $(y_0+1)e-1=0$. 由此即得 $z_0=0$, $y_0=e^{-1}-1$, 亦即方程组 (4.16) 关于 z_0, y_0 是可解的, 且有 $\Delta_0=e\neq 0$. 因此最后可得 $\overline{y}_0(t)=-1+e^{t-1}$, $\overline{z}_0(t)=e^{t-1}$. 显然, 当 $0\leqslant t\leqslant 1$ 时有 $(\overline{y}_0(t),t)\in D($ 条件III). 我们验证条件 IV. 由于对任意的 y, $\left.\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_{z=\varphi_1=y+1}=-2$, 因此这对 $y=\overline{y}_0(t)$ 也成立, 即满足右稳定条件. 最后, 条件V也满足; 实际上附加方程组 (2.24) 为

$$\frac{d\widetilde{z}}{d\tau}=-(\widetilde{z}-e^{-1})(\widetilde{z}-e^{-1}+1)(\widetilde{z}-e^{-1}+2).$$

于是由第二章 §7 第五段的结果, 不难相信, 由初始条件 $\widetilde{z}(0)=z_0=0$ (0 位于 $e^{-1}-1$ 与 e^{-1} 之间) 所确定的解 $\widetilde{z}(\tau)$, 当 $\tau\to+\infty$ 时趋于 e^{-1}, 即趋于 $\varphi_1(y_0,0)$.

练习 验证 φ_3 也满足定理4.1的条件, 其答案为 $\overline{y}_0(t)=1-e^{t-1}$.

这样一来, 问题 (4.45) 至少有两个解, 其 y 分量分别趋于 $\overline{y}_0(t)=e^{t-1}-1$ (对应于 ϕ_1 的解) 和 $\overline{y}_0(t)=1-e^{t-1}$ (对应于 ϕ_3 的解).

三、其他类型的定解条件 上述方法也可用于比 (4.5) 更复杂的定解条件问题 (见 [19]). 本段将用例子来说明三个问题; 当然, 这并不是说所述方法只限于这类问题. 对于这三个问题中的每一个, 我们都没有进行详细的推导, 而只是简单地描述构造渐近解的算法. 但是如果需要的话, 可以应用第二段的方法进行论证. 我们建议将此作为读者的练习.

1. *多点边值问题* 假设定解条件为

$$R(x(0,\mu),x(t_1,\mu),\cdots,x(t_p,\mu),x(1,\mu))=0,$$

其中 $t_1,\cdots,t_p$ 为在区间 (0, 1) 中给定的数. 按照第一段所说的方法, 可以把求解这个问题变成求初值问题 (4.4), (4.6) 的解; 展开式 (4.7) 及其各项应满足的方程和条件 (4.8) ~ (4.13) 均不必改变, 需要变动的只是决定 (4.6) 中参数 x_k 的方程. 代替 (4.16) 有

$$R_0\overset{\text{def}}{=}R(x_0,\overline{x}_0(t_1),\cdots,\overline{x}_0(t_p),\overline{x}_0(1))=0. \tag{4.46}$$

因为由 (4.8), (4.9) 可知, $\overline{x}_0(t_1),\cdots,\overline{x}_0(t_p),\overline{x}_0(1)$ 都是 x_0 的函数, 因此像在第一段那样, 在 (4.46) 中可以看成是未知量的也只有 x_0; 如果 (4.46) 关于 x_0 可解, 且对应的行列式不为零, 那么随后的近似方程 $R_k=0$, $k=1,2,\cdots$, 也将关于 x_k 可解, 从而 (4.6) 的所有参数都可以确定, 这就意味着构造出 (4.7).

2. *辅助参数问题* 假设定解条件的个数超过了 $(M+m)$, 但方程组含有未知参数 λ, 那么在决定 λ 的值时, 可以要求方程组满足补充条件. 考虑方程组

$$\mu\frac{dz}{dt}=F(z,y,t,\lambda),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,y,t,\lambda);$$

其中 z,y 和 λ (参数) 分别为 M,m 和 p 维向量, 而定解条件为

$$R(x(0,\mu),x(1,\mu))=0,$$

这里 R 为 $M+m+p$ 维向量 (为了确定起见, 这里只考虑两点边值问题) .

对于这类问题的研究也可以归结为第一段所述的格式, 唯一的改变是 λ 也对 μ 展开成级数: $\lambda=\lambda_0+\mu\lambda_1+\cdots+\mu^k\lambda^k+\cdots$. 于是代替 (4.16), 现在有

$$R_0\overset{\text{def}}{=}R(x_0,\overline{x}_0(1,x_0,\lambda_0))=0;$$

在这个方程组中可将分量 x_0,λ_0 看成待定的未知量, 其个数正好与方程的数目 $(M+m+p)$ 一致. 在随后的近似中, 我们得到关于 x_k,λ_k 的方程 $R_k=0$.

对于这类含有参数 λ 的问题也可以归结为条件极值的变分问题. 但是在变分问题中自然会出现在本章 §12 中提到的条件稳定情形, 这将在 §14 进行详细研究, 因此专门在 §14 的第十一段将讨论有关变分的问题.

3. *变动边界问题* 参数 λ 不仅出现在方程中, 也可能出现在边界条件中. 二阶方程式 $\mu\dfrac{d^2y}{dt^2}=F\Big(\dfrac{dy}{dt},y,t\Big)$ 或者二阶方程组的变动边值问题

$$\frac{dz}{dt}=F(z,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=z;$$

$$z(0,\mu)=\alpha,\quad y(\lambda,\mu)=a(\lambda),\quad z(\lambda,\mu)=b(\lambda);\tag{4.47}$$

就是这类问题的一个例子. 其中 α 为给定常数, $a(\lambda),b(\lambda)$ 为给定函数. 特别当 $b(\lambda)=-\dfrac{1}{a'(\lambda)}$ 时, 所论问题有简单的几何意义, 即要求找出一条曲线 $y(t,\mu)$, 使得它与某给定曲线 $y=a(t)$ 相交成直角.

令 $\lambda=\lambda_0+\mu\lambda_1+\cdots$, 以及解在 $t=0$ 时的展开式仍为 (4.6). 将 (4.7) 代入 (4.47) 可得

$$z_0+\mu z_1+\cdots=\alpha,\tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}&\overline{y}_0(\lambda_0)+\mu[\lambda_1\overline{y}_0'(\lambda_0)+\overline{y}_1(\lambda_0)]+\mu^2\Big[\frac{\lambda_1^2}{2}\overline{y}_0''(\lambda_0)+\lambda_2\overline{y}_0'(\lambda_0)+\lambda_1\overline{y}_1'(\lambda_0)+\overline{y}_2(\lambda_0)\Big]+\cdots\\&=a(\lambda_0)+\mu\lambda_1a'(\lambda_0)+\mu^2\Big[\frac{\lambda_1^2}{2}a''(\lambda_0)+\lambda_2a'(\lambda_0)\Big]+\cdots,\end{aligned}\tag{4.49}$$

以及在 (4.49) 左端以 z 代替 y, 而在其右端以 b 代替 a 得到的关系式, 于是零次近似为

$$z_0=\alpha,\quad \overline{y}_0(\lambda_0)=a(\lambda_0),\quad \overline{z}_0(\lambda_0)=b(\lambda_0);\tag{4.50}$$

其中 z_0,y_0,λ_0 为待定未知量; 但由第一个方程即得 $z_0=\alpha$ (以及同样由 (4.48) 立即得到高阶近似 $z_k=0$). (4.50) 中关于 $\overline{y}_0(\lambda_0)$ 和 $\overline{z}_0(\lambda_0)$ 的方程也依赖于初值 y_0; 我

们假设这些方程对 y_0, λ_0 是可解的 (这时还应满足 $\lambda_0 > 0$), 且对应的函数行列式不为零; 则像前面所研究的情形那样, 这个条件也保证了构造所有高阶近似的可能性.

当 (4.4) 为定常方程组时; 求其周期解问题也是一个在边界条件中含有参数 λ 的问题 (见 [16]).

§14. 条件稳定的情况 (有双边界层的边值问题)

一、边值问题类的扩充 在上节我们研究了一类边值问题, 其渐近解可由求解初值问题时得到的展开式 (3.24) ~ (3.26) 来进行构造. 这时要求特征方程 (3.21) 的特征根 $\overline{\lambda}_i(t)$ 满足稳定性条件 (3.22). 对初值问题来说, 这个条件是自然的, 而且在下述意义下是实质性的, 即若这个条件不满足, 则初值问题的解当 $\mu \to 0$ 时, 或者其极限一般不存在 (例如当存在 $\mathrm{Re}\overline{\lambda}_i(t) > 0$ 的根时, 可参看第一章方程 (1.10) 当 $a > 0$ 的情形), 或者关于极限过程的定理仍然成立, 但渐近展开式却是另外的样子 (当渐近稳定条件仍然成立, 但不能用一次近似来表示时, 就是这种情况, 例如参看 [20]).

当考虑边值问题时, 例如在本章 §12 中所注意到的那样, 条件 (3.22) 已经不是实质性条件, 而只是在上节中发展起来的方法本身的需要而已. 我们再来回忆一下例子 (1.14), 其特征方程有根 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, 即条件 (3.22) 不满足. 这时初值问题的解当 $\mu \to 0$ 时, 其极限一般并不存在. 但是边值问题 (1.14), (1.19) 却收敛于退化解, 因此这类问题已经不能再用上节的方法进行研究了.

这个例子说明, 当研究边值问题时, 稳定性条件 (3.22) 应当用更一般的条件来代替, 即要求特征方程的根的实部不为零, 其中某些小于零, 而其余大于零.

虽然为了研究这种情形不能利用上章的结果, 但正像下面将看到的那样, 这时可以适当修改在上章提出的构造渐近展开的格式, 并加以扩充, 然后按照上章的办法, 但使用一些更复杂的工具; 可以证明 (在所构造的形式展开的主项邻域中), 上述边值问题的解存在, 并且可以证明这种展开的渐近特性.

二、分块矩阵及其运算 在这一节我们将遇到分块的 $M \times M$ 阶方阵 A; 对于这样的方阵, 我们采用如下的记法

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{4.51}$$

其中 $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ 是阶数分别为 $k \times k$, $k \times (M-k)$, $(M-k) \times k$, $(M-k) \times (M-k)$ 阶的分块矩阵. 而矩阵 A 的元素将用 $A^{ij}, i, j = 1, 2, \cdots, M$, 来表示.

对于向量函数 ζ, 将类似地写成如下的两个分块形式

$$\zeta = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}, \tag{4.52}$$

其中 ζ_1 有 k 个分量, 而 ζ_2 有 $(M-k)$ 个分量; 此外, ζ 的第 i 个分量用 ζ^i 来表示.

若在 (4.51) 中的 $A_{12}=0$, $A_{21}=0$, 则称 A 为对角分块矩阵, 即矩阵

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} . \tag{4.53}$$

为了今后对分块矩阵进行的运算, 我们在此简要地介绍下列运算规则 (例如参看 [30] 中第 2 章第 5 节):

1. **分块阵的乘积** 如果

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

则有

$$AB=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

二阶分块阵的乘积与 A_{ik}, B_{jl} 不是分块阵而是矩阵元素时的乘积规则完全一样. 特别, 若乘积因子中有一个为 (4.53) 形式的对角分块阵时, 那么当对一个分块阵左乘一个 (4.53) 的对角分块阵就等于把该分块阵按行分块左乘, 而对一个分块阵右乘一个 (4.53) 的对角分块阵, 就是按列分块右乘, 即

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} \\ A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B_{11}A_{11} & B_{12}A_{22} \\ B_{21}A_{11} & B_{22}A_{22} \end{bmatrix}.$$

2. **分块阵与列向量的乘积**

$$A\zeta=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}\zeta_1+A_{12}\zeta_2 \\ A_{21}\zeta_1+A_{22}\zeta_2 \end{bmatrix}. \tag{4.54}$$

3. **逆阵** (Frobenius 公式) 若 A 为 (4.51) 形式的矩阵, 且 $\det A\neq 0$, $\det A_{11}\neq 0$, 则有

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}H^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}H^{-1} \\ -H^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & H^{-1} \end{bmatrix}, \tag{4.55}$$

其中 $H=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ 非异.

4. **若 A 为拟三角矩阵** (即 $A_{12}=0$ 或者 $A_{21}=0$), 则有

$$\det A=\det A_{11}\det A_{22} \tag{4.56}$$

三、条件稳定, 不变流形 S^+ 和 S^- [①] 我们考虑定常方程组

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = F(\sigma), \tag{4.57}$$

这里 ζ 为欧氏空间 $\mathbf{R}^M$ 中的 M 维向量.

我们称具有如下性质的流形 J ($\mathbf{R}^M$ 中的子集) 为方程组 (4.57) 的不变流形, 若方程组 (4.57) 从 J 上出发的轨线 $\zeta(\tau)$ 对一切 $\tau \in (-\infty, \infty)$ 都整个地位于 J 上. 换句话说, 这个流形是由 (4.57) 的轨线组成 (例如, 参看 [62]).

设 $\zeta = 0$ 为方程组 (4.57) 的奇点, 即 $F(0) = 0$, 则 (4.57) 关于 $\zeta = 0$ 的特征方程为

$$\det(F_\zeta(0) - \lambda E_M) = 0.$$

假设这个特征方程的根 λ_i 满足如下条件:

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0,\ i = 1, \cdots, k,\ k < M; \quad \operatorname{Re}, \lambda_i > 0,\ i = k+1, \cdots, M. \tag{4.58}$$

我们考虑 (4.57) 的一次近似 (或线性近似) 方程组

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = F_\zeta(0)\zeta.$$

令 $F_\zeta(0) = A$, 则有

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = A\zeta. \tag{4.59}$$

由于方阵 A 有正实部的特征值, 因此方程组 (4.59) 的奇点 $\zeta = 0$ 在 Liapunov 意义下是不稳定的; 但是下面我们将看到, 在 $\mathbf{R}^M$ 中存在一个 k 维 (k 为负实部根的个数) 的线性子空间 $\mathbf{R}^k$, 它是 (4.59) 的不变流形方程组, 而且若只在 $\mathbf{R}^k$ 上考虑 (4.59) 的话, 则其奇点 $\zeta = 0$ 当 $\tau \to \infty$ 时在 Liapunov 意义下是渐近稳定的. $\mathbf{R}^k$ 自然就称为稳定子空间.

如果 (4.58) 成立, 我们就说 (4.59) 的奇点 $\zeta = 0$ 是条件稳定的. 上面的讨论说明这个名称的意义, 即如果不是在整个空间 $\mathbf{R}^M$ 上, 而只是在它的某个子空间 $\mathbf{R}^k$ 上考虑方程组 (4.59) 时, 则其奇点是渐近稳定的.

我们不仅可以确信这个稳定子空间 $\mathbf{R}^k$ 的存在性, 而且可以找出 (4.59) 的解在这方面个子空间中应取的形式; 为此在 (4.59) 中作变量替换

$$\zeta = B\eta, \tag{4.60}$$

这里的方阵 B 把方阵 A 变成对角分块形式

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} C^+ & 0 \\ 0 & C^- \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} C;$$

①在写作本段时, 我们使用了承蒙 В. А. Тупчиев 允诺我们使用的材料.

并且 C^+ 有特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, 而 C^- 有特征值 $\lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_M$. 这样的方阵 B 显然是存在的, 例如把 A 变成 Jordan 标准形的矩阵. 这时 (4.59) 成为

$$\frac{d\eta_1}{d\tau} = C^+\eta_1, \tag{4.61}$$

$$\frac{d\eta_2}{d\tau} = C^-\eta_2. \tag{4.62}$$

由于矩阵 C 的性质, 方程组 (4.61) 的奇点 $\eta_1 = 0$ 当 $\tau \to \infty$ 时是渐近稳定的, 而方程组 (4.62) 的奇点 $\eta_2 = 0$ 当 $\tau \to -\infty$ 时也是渐近稳定的.

考虑方程组 (4.61), (4.62) 满足初始条件 $\eta_2(0) = 0$ ($\eta_1(0)$ 任意) 的轨线集合, 于是在此集合上有 $\eta_2(\tau) \equiv 0$. 在变量 ζ 之下, 这个轨线集合就是我们所要找的 $\mathbf{R}^k$. 在 (4.60) 中令 $\eta_2 = 0$, 并利用 (4.54) 的记号即得

$$\zeta_1 = B_{11}\eta_1, \quad \zeta_2 = B_{21}\eta_1. \tag{4.63}$$

假设

$$\det\ B_{11} \neq 0; \tag{4.64}$$

因此在 (4.63) 中消去 η_1 之后, 可得在变量 ζ 之下 $\mathbf{R}^k$ 的方程

$$\zeta_2 = B_{21}B_{11}^{-1}\zeta_1; \tag{4.65}$$

将此代入 (4.59), 即得 ζ_1 应满足的微分方程

$$\frac{d\zeta_1}{d\tau} = (A_{11} + A_{12}B_{21}B_{11}^{-1})\zeta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{A}\zeta_1. \tag{4.66}$$

可以证明, 矩阵 $\widetilde{A}$ 与 C^+ 之间有如下关系

$$\widetilde{A} = B_{11}C^+B_{11}^{-1}. \tag{4.67}$$

为此, 我们采用另外的方法推出 (4.66); 由等式 $\zeta = B_{11}\eta_1$ 及 (4.61) 可得

$$\frac{d\zeta_1}{d\tau} = B_{11}\frac{d\eta_1}{d\tau} = B_{11}C^+\eta_1 = B_{11}C^+B_{11}^{-1}\zeta_1; \tag{4.68}$$

比较 (4.66) 与 (4.68) 式, 即得 (4.67). (4.67) 也可以直接从等式 $AB = BC$ (即 $B^{-1}AB = C$) 得到, 这只要在此等式两边令其左上方块相等即可. 由 (4.67) 即知, $\widetilde{A}$ 具有与 C^+ 同样的特征值, 即 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$. 我们用引理的形式总结所得的结果:

引理 4.1 *在条件 (4.58), (4.64) 之下, 方程组 (4.59) 存在不变流形 (4.65). 在此不变流形上, 方程组 (4.59) 取 (4.66) 的形式, 而且 $\widetilde{A}$ 的特征值为 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$.*

注 1. 在条件 $\det B_{22} \neq 0$ 之下, 可以得到关于 $\lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_M$ 的不变流形的类似引理.

2. 在二维的情况下 ($\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$), 这两个流形就是鞍点 $(0,0)$ 的分界线.

我们现在回到非线性方程组 (4.57). 在条件 (4.58) 之下, 可以类似地证明, 方程组 (4.57) 也存在具有同样性质的 k 维不变流形 S^+ 和 $(M-k)$ 维不变流形 S^-; 它们都是由 (4.57) 的整条轨线组成; 且在 S^+ 上的轨线当 $\tau \to \infty$ 时都趋于坐标原点; 而对 S^- 上的轨线来说, 当 $\tau \to -\infty$ 时也都趋于坐标原点.

我们还发现, 在所考虑的情况下, S^+ 起了一个类似于渐近稳定奇点影响域 (见 §7 中第二段) 的作用 (当 $\tau \to \infty$). 与影响域的结构一样, 在此我们并不研究 S^+ 的全局结构, 而只需要在 $\zeta = 0$ 的某个充分小邻域中 S^+ 的存在性, 这一点早已, 例如在 [37] 中, 得到证明. (这使我们想起, 对于渐近稳定奇点来说, 这种局部意义下影响域的存在性, 可以直接由渐近稳定的定义推出) . 关于 S^- 也可以进行同样的讨论.

从几何上来说, 在线性系统的情况下, S^+ 和 S^- 都是超平面; 而对于非线性系统, 一般来说它们是 $\mathbf{R}^M$ 中经过坐标原点的某些超曲面.

我们现在对 S^+ 和 S^- 的分析表达式作出某些假设. 如果定常系统 (4.57) 有 $(M-1)$ 个首次积分

$$\psi_i(\zeta^1, \cdots, \zeta^M) = c_i, \quad i = 1, \cdots, M-1; \tag{4.69}$$

且其中的 c_i 为独立参数, 则 (4.69) 一般来说就完全确定了充满整个空间 $\mathbf{R}^M$ 的相轨线集合. 如果在 c_i 之间加上了一些联系, 例如令 $c_i = c_i(u_1, \cdots, u_{k-1})$, 这里 $u_1, \cdots, u_{k-1}$ 为独立参数, 那么就得到某个由相轨线组成的 k 维流形

$$\psi_i(\zeta^1, \cdots, \zeta^M) = c_i(u_1, \cdots, u_{k-1}), \quad i = 1, \cdots, M-1.$$

从这些方程消去 $u_1, \cdots, u_{k-1}$, 则可得到 $(M-k)$ 个方程

$$\Psi_j(\zeta^1, \cdots, \zeta^M) = 0, \quad j = k+1, \cdots, M.$$

假设这些方程对 $\zeta^{k+1}, \cdots, \zeta^M$ 可解, 亦即

$$\zeta^i = \Phi^i(\zeta^1, \cdots, \zeta^k), \quad i = k+1, \cdots, M,$$

或者利用 (4.52) 的分块记法有

$$\zeta_2 = \Phi_2(\zeta_1). \tag{4.70}$$

从 (4.70) 本身的推导即知, 当相点沿轨线运动时, 它是一个恒等式, 因此有 $\dfrac{d\zeta_2}{d\tau} - \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \zeta_1}\dfrac{d\zeta_1}{d\tau}$, 或者

$$F_2(\zeta(\tau)) = H(\zeta_1(\tau)) F_1(\zeta(\tau)), \tag{4.71}$$

其中 F_1, F_2 分别为 F 的 k 维和 $(M-k)$ 维分块列向量 (见 (4.52)), 而 $H(\zeta_1) = \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial \zeta_1}$. 由于曲面 (4.70) 是由整条轨线组成的, 所以 (4.71) 满足关于 ζ_1 的恒等式

$$F_2(\zeta(\zeta_1)) \equiv H(\zeta_1) F_1(\zeta(\zeta_1)), \tag{4.72}$$

这里 $\zeta(\zeta_1)$ 表示在 ζ 中的 ζ_2 由 $\Phi_2(\zeta_1)$ 代替. 将 (4.70) 代入 (4.57) 的右端即得

$$\frac{d\zeta_1}{d\tau} = F_1(\zeta(\zeta_1)), \tag{4.73}$$

$$\frac{d\zeta_2}{d\tau} = F_2(\zeta(\zeta_1)). \tag{4.74}$$

我们用方程组 (4.73) 来确定 $\zeta_1(\tau)$, 而 $\zeta_2(\tau)$ 就利用这个 $\zeta_1(\tau)$ 代入 (4.70) 之后求出. 因此 (4.74) 就变成了一个恒等式. 实际上, 由 (4.71) 有

$$\frac{d\zeta_2}{d\tau} = H(\zeta_1(\tau))\frac{d\zeta_1}{d\tau} = H(\zeta_1(\tau))F_1(\zeta(\zeta_1)) = F_2(\zeta(\zeta_1)),$$

即 (4.74) 成立.

现在我们提出对 S^+ 的基本假设:

1. 设 S^+ 在变量 ζ_1 的某个区域 G^+ 上可写成

$$\zeta_2 = \Phi_2(\zeta_1). \tag{4.75}$$

如果在流形 S^+ 上考虑 (4.57), 则像上面指出那样, 它的前 k 个方程就取 (4.73) 的形式, 而后 $(M-k)$ 个方程变成了恒等式. 显然方程组 (4.59) 是 (4.57) 的线性近似方程组, 关系式 (4.65) 是 (4.75) 的线性近似, 方程组 (4.66) 是 (4.73) 的线性近似. 由此得出 (4.73) 的解 $\zeta_1 = 0$ 也是渐近稳定的, 从而如引理 3.1 对 $\Pi_0 z(\tau)$ 的估计 (见上章 §10 第 3 段) 那样, 若 $\zeta_1(0) \in G^+$, 则对 $\zeta_1(\tau)$ 来说, (3.58) 型的指数式估计也是正确的. 从而只要 $\zeta_2(0) = \Phi_2(\zeta_1(0))$, 由 (4.75) 即得对 $\zeta_2(\tau)$ 的同样估计.

现在对 S^- 给出类似于上面对 S^+ 所作的假设:

2. 设 S^- 在变量 ζ_2 的某个区域 G^- 上可写成

$$\zeta_1 = \Phi_1(\zeta_2). \tag{4.76}$$

由此推出关于 ζ_2 的类似于 (4.73) 的方程, 以及若 $\zeta_2(0) \in G^-$, $\zeta_1(0) = \Phi_1(\zeta_2(0))$, 则可得到对 $\zeta_2(\tau)$ 和 $\zeta_1(\tau)$ 当 $\tau \to -\infty$ 时的指数式减小的估计. 我们把这些结果写成如下引理:

引理 4.2 *若方程组 (4.57) 的初始点 $\zeta(0) \in S^+$, 则对 $\tau \geqslant 0$ 有不等式*

$$\| \zeta(\tau) \| \leqslant c\exp(-\kappa\tau) \tag{4.77}$$

成立. 若初始点 $\zeta(0) \in S^-$ 则对 $\tau \leqslant 0$ 满足不等式

$$\| \zeta(\tau) \| \leqslant c\exp(\kappa\tau).$$

正像对线性方程组 (4.59) 那样, 我们称方程组 (4.57) 的点 $\zeta = 0$ 为条件稳定奇点.

现在考虑 (4.73), (4.74) 以及 (4.75) 的变分方程组

$$\frac{d\Delta_1}{d\tau} = F_{11}\Delta_1 + F_{12}\Delta_2, \tag{4.78}$$

$$\frac{d\Delta_2}{d\tau} = F_{21}\Delta_1 + F_{22}\Delta_2, \tag{4.79}$$

$$\Delta_2 = H\Delta_1; \tag{4.80}$$

其中 Δ_1, Δ_2 表示未知向量函数 Δ 的分块, 而 F_{ij} 为 F_ζ 对应的分块矩阵, F_{ij} 的变量是 $\zeta(\zeta_1(\tau))$, 这里当 $\tau \to \infty$ 时有 $\zeta_1(\tau) \to 0$.

可以证明, (4.79) 可由 (4.78) 和 (4.80) 推出 (这与 (4.74) 是 (4.73) 和 (4.70) 的结果完全一样) ; 为此, 将 (4.80) 的两边对 τ 求导, 并利用 (4.78) 和 (4.73) 即得

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta_2}{d\tau} &= H\frac{d\Delta_1}{d\tau} + \frac{dH}{d\tau}\Delta_1 = H\frac{d\Delta_1}{d\tau} + \left(\frac{\partial H}{\partial \zeta_1}F_1\right)\Delta_1 \\ &= \left[H\big(F_{11} + F_{12}H\big) + \left(\frac{\partial H}{\partial \zeta_1}F_1\right)\right]\Delta_1,\end{aligned} \tag{4.81}$$

其中 $\left(\dfrac{\partial H}{\partial \zeta_1}F_1\right)$ 是以 $\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{\partial H^{jl}}{\partial \zeta^i}F^i$ 为元素的矩阵. 把恒等式 (4.72) 两端对分量 ζ_1 求导, 可得 $F_{21} + F_{22}H = H(F_{11} + F_{12}H) + \left(\dfrac{\partial H}{\partial \zeta_1}F_1\right)$. 由此可见 (4.81) 的右端为 $F_{21}\Delta_1 + F_{22}H\Delta_1$, 亦即与 (4.79) 的右端完全一致; 因此 (4.79) 实际上就是 (4.78) 和 (4.80) 的结果.

如果 $\Delta_1(\tau)$ 是方程组

$$\frac{d\Delta_1}{d\tau} = F_{11}\Delta_1 + F_{12}H\Delta_1 \overset{\text{def}}{=} F_{\Delta_1}\Delta_1 \tag{4.82}$$

的解, 而 $\Delta_2(\tau)$ 通过 (4.80) 由 $\Delta_1(\tau)$ 确定, 那么由上面所说, $\Delta_1(\tau), \Delta_2(\tau)$ 将是方程组 (4.78), (4.79) 的解, 而且这个解满足初始条件

$$\Delta_1(0) = \Delta_1^0, \quad \Delta_2(0) = H(\zeta_1(0))\Delta_1^0, \tag{4.83}$$

其中 Δ_1^0 是任意的. 因此我们的到了方程组 (4.78), (4.79) 满足条件 (4.83) 的解.

由于 (4.82) 是 (4.73) 的变分方程组, 因此当 $\tau \to \infty$ 时 F_{Δ_1} 的极限与方程组 (4.66) 中的矩阵 $\widetilde{A}$ 是一样的. 实际上, (4.66) 是 (4.73) 在点 $\zeta_1 = 0$ 的邻域中的线性近似, 即 $F_{\Delta_1}(\zeta(\zeta_1(\infty))) = F_{\Delta_1}(\zeta(0)) = \widetilde{A}$; 因此, 根据上章 §10 第 3 段的结果 ((3.74) 的齐次方程组就是 (3.43) 的变分方程组; 而这个齐次方程组的解有 (3.58) 型的估计), 对 $\Delta_1(\tau)$ 有 (4.77) 型的估计, 于是由于 (4.80), 对 $\Delta_2(\tau)$ 也有同样的估计. 把这些结果写成如下引理:

引理 4.3 *初值问题 (4.78), (4.79), (4.83) 的解满足估计式*

$$\| \Delta(\tau) \| \leqslant c \exp(-\kappa\tau), \quad 对\ \tau \geqslant 0.$$

在方程组 (4.78), (4.79) 中, 分块阵 F_{ij} 依赖于 $\zeta_1(\tau)$, 而当 $\tau \to \infty$ 时有 $\zeta_1(\tau) \to 0$. 因此令 $\tau \to \infty$ 求极限即知矩阵 $F_\zeta(\zeta(\zeta_1(\tau)))$ 变成矩阵 A, 它满足条件 (4.58). 如所周知 (例如, 参看 [50]), (4.78), (4,79) 的基本解组是由 k 个当 $\tau \to \infty$ 时指数式趋于零的向量和 $(M-k)$ 个当 $\tau \to \infty$ 时指数式增长的向量组成. 而方程组 (4.82) 的基本解组是由 k 个指数式减小的向量组成. 因此 (4.82) 的基本解组与 (4.80) 一起就给出了 (4.78), (4.79) 的基本解组向量, 当 $\tau \to \infty$ 时它们是指数式衰减的.

我们现在证明, 若初值不满足 (4.83), 则 (4.78), (4.79) 具有这个初值的解当 $\tau \to \infty$ 时就不可能趋于零. 倘若它趋于零, 则它必为上述 k 个趋于零的解的线性组合, 即为 (4.82), (4.80) 的解, 从而其初值必满足 (4.83). 将这些事实写成如下引理:

引理 4.4 *如果方程组 (4.78), (4.79) 的解的初值不满足条件 (4.83), 则当 $\tau \to \infty$ 时, (4.78), (4.79) 的这个解就不可能趋于零.*

结果 *方程组 (4.78), (4.79) 不存在满足条件 $\Delta_1(0) = 0$ 且当 $\tau \to \infty$ 时趋于零的非平凡解.*

实际上, 倘若这种解存在, 则必定有 $\Delta_2(0) \neq 0$, 否则这个解将为平凡解. 但若 $\Delta_2(0) \neq 0$, 则这个解就不能满足初始条件 (4.83), 因此根据引理4.4, 当 $\tau \to \infty$ 时解就不可能趋于零.

下面我们研究 (4.78), (4.79) 型的非齐次方程组

$$\frac{d\Delta}{d\tau} = F_\zeta(\zeta(\zeta_1(\tau)))\Delta + \psi(\tau), \tag{4.84}$$

其中对 $\tau \geqslant 0$ 有 $\| \psi(\tau) \| \leqslant c \exp(-\kappa\tau)$.

引理 4.5 *方程组 (4.84) 存在满足初始条件 $\Delta_1(0) = \Delta_1^0$ 且当 $\tau \to \infty$ 时趋于零的唯一解 $\Delta(\tau)$, 对这个解还满足不等式*

$$\| \Delta(\tau) \| \leqslant c \exp(-\kappa\tau), \quad 当\ \tau \geqslant 0. \tag{4.85}$$

我们首先构造 (4.84) 的一个当 $\tau \to \infty$ 时趋于的特解. 为此, 在 (4.84) 中作变量替换

$$\Delta_1 = \delta_1, \quad \Delta_2 = H\delta_1 + \delta_2; \tag{4.86}$$

将 (4.86) 代入 (4.84) 即得

$$\frac{d\delta_1}{d\tau} = F_{\Delta_1}\delta_1 + F_{12}\delta_2 + \psi_1(\tau), \quad \frac{d\delta_2}{d\tau} = F_{\Delta_2}\delta_2 + \psi_2(\tau) - H\psi_1(\tau), \tag{4.87}$$

这里 F_{Δ_1} 由 (4.82) 所定义, 而 $F_{\Delta_2} \stackrel{\text{def}}{=} F_{22} - HF_{12}$.

在上面对方程组 (4.82) 的讨论中, 我们看到当 $\tau \to \infty$ 时 F_{Δ_1} 的极限值为 $F_{\Delta_1}(\zeta(0)) = \widetilde{A} = B_{11}C^+B_{11}^{-1}$; 这说明当 $\tau \to \infty$ 时 F_{Δ_2} 的极限值是

$$F_{\Delta_2}(\zeta(0)) = \overset{\approx}{A} \overset{\text{def}}{=} \left((B^{-1})_{22}\right)^{-1} C^-(B^{-1})_{22};$$

由矩阵 C^- 的性质即知, 这个极限矩阵的特征值有正实部. 在条件 (4.64) 之下, 容易从 (4.55) 推出 $((B^{-1})_{22})^{-1}$ 的存在性, 这只要在 (4.55) 中取 $A = B$, 即见 $H = ((B^{-1})_{22})^{-1}$.

练习 证明等式 $F_{\Delta_2}(\zeta(0)) = \overset{\approx}{A}$ 的正确性.

我们用 $\Phi(\tau)$ 和 $\Psi(\tau)$ 分别表示齐次方程组 $\dfrac{d\Phi}{d\tau} = F_{\Delta 1_1}\varphi$ 和 $\dfrac{d\Psi}{d\tau} = F_{\Delta_2}\psi$ 的基本解矩阵. 由于矩阵 $\widetilde{A}$ 的特征值实部都是负的, 因此对 $\Phi(\tau)$ 来说, 不等式 (3.78) 是正确的; 而对 $\Psi(\tau)$ 来说, 由于矩阵 $\overset{\approx}{A}$ 的特征值都有正实部, 因而满足类似的不等式

$$\| \Psi(\tau)\Psi^{-1}(s) \| \leqslant c\exp(-\kappa(s-\tau)), \quad 当 0 \leqslant \tau \leqslant s. \tag{4.88}$$

由于当 $\tau \to \infty$ 时有 $\delta_2(\tau) \to 0$, 且 $\Psi(\tau)$ 为基本解矩阵, 因此从 (4.87) 第二组方程得到

$$\delta_2(\tau) = \int_\infty^\tau \Psi(\tau)\Psi^{-1}(s)[\psi_2(s) - H\psi_1(s)]ds;$$

因此由不等式 (4.88) 及对 $\psi(\tau)$ 的估计得出对 $\delta_2(\tau)$ 的 (4.85) 型的指数式估计. 知道 $\delta_2(\tau)$ 之后, 利用基本解矩阵 $\Phi(\tau)$, 我们可以写出 (4.87) 第一组方程满足条件 $\delta_1(0) = 0$ 的解

$$\delta_1(\tau) = \int_0^\tau \Phi(\tau)\Phi^{-1}(s)[F_{12}\delta_2(s) + \psi_1(s)]ds.$$

于是由不等式 (3.78) 及 $\delta_2(\tau)$ 和 $\psi_1(\tau)$ 的指数式估计, 即得 $\delta_1(\tau)$ 的 (4.85) 型估计. 此外, 从 (4.86) 直接推出对方程组 (4.84) 所构造的特解的 (4.85) 型估计.

为了得到引理 4.5 所说的解, 必须对所构造的特解再加上齐次方程组 (4.78), (4.79) 满足条件

$$\Delta_1(0) = \Delta_1^0, \quad \Delta_2(0) = H(\zeta_1(0))\Delta_1^0$$

的解. 根据引理 4.3, 这个解也满足 (4.85) 型的不等式. 亦即它们的和也满足 (4.85), 这就是所需要的证明.

解的唯一性直接从引理 4.4 的结果得出.

对于 S^- 也有类似于引理 4.3 ~ 引理 4.5 的结论.

最后我们注意到, 在这里所采用的办法是为了使得描述 S^+ 和 S^- 的解析形式尽量简单而不得不加上某些不必要的限制 (见假设 1,2), 可以给出 S^+, S^- 和本段讨论的其他对象以具有几何特性的更一般描述.

四、边值问题的提法 我们仍然考虑方程组 (3.18)

$$\mu\frac{dz}{d\tau}=F(z,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,y,t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\tag{4.89}$$

其中 z,F 为 M 维、而 y,f 为 m 维向量函数. 为了确定这组方程的解, 我们给定边界条件

$$z_1(0,\mu)=z_1^0,\quad z_2(1,\mu)=z_2^0;\tag{4.90}$$

$$y(0,\mu)=y^0;\tag{4.91}$$

其中下标是表示分块的号码 (见 (4.52)) . 由此即见, 在区间 $[0,1]$ 的左端点给定了 z 的 k 个分量, 而在右端点给出了其余的 $(M-k)$ 个分量. 条件 (4.90) 还可以写成如下的形式

$$az(0,\mu)=az^0,\tag{4.92}$$

$$bz(1,\mu)=bz^0;\tag{4.93}$$

其中

$$a=\begin{bmatrix}E_k & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & E_{M-k}\end{bmatrix}.$$

在 (4.89) 中令 $\mu=0$ 之后即得退化方程组

$$0=F(\overline{z},\overline{y},t),\quad \frac{d\overline{y}}{dt}=f(\overline{z},\overline{y},t);\tag{4.94}$$

并对其给定初始条件

$$\overline{y}(0)=y^0.\tag{4.95}$$

我们保留上章 §9 第 1 段中的条件 I, II, III, 而且仍用 I, II, III 表示; 至于定理 3.1 中的条件 IV, V 将做实质性的修改.

代替 IV (即代替 (3.22)), 我们提出如下仍然记作 IV 的条件:

IV. 对于 $0\leqslant t\leqslant 1$, 假设矩阵 $\overline{F}_z(t)\equiv F_z(\overline{z}(t),\overline{y},t)$ 的特征值 $\overline{\lambda}_i(t)$ 满足条件

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}_i(t)<0,\ \text{当}\ i=1,\cdots,k<M,\\ \mathrm{Re}\,\overline{\lambda}_i(t)>0,\ \text{当}\ i=k+1,\cdots,M;\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 1.\tag{4.96}$$

(这时我们将称方程 $F(z,y,t)=0$ 的根 $z=\varphi(y,t)$ 为条件稳定的). 此外, 我们假定成立如下不等式①:

$$\begin{cases}\overline{\lambda}_i(t)\neq\overline{\lambda}_j(t),\quad i\neq j,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\\ \mathrm{Re}\overline{\lambda}_1(t)\leqslant\mathrm{Re}\overline{\lambda}_2(t)\leqslant\cdots\leqslant\mathrm{Re}\overline{\lambda}_M(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}\tag{4.97}$$

①对于初值问题来说, 这个条件并不重要. 大致的说, 它不是实质性条件, 而只是与研究问题 (4.89) ~ (4.91) 时所采用的方法有关.

我们注意到: 特征值 $\overline{\lambda}_i(t)$ 有负实部的个数 k 正好与向量 z 在 $t=0$ 给定值的分量个数一样; 而特征值 $\overline{\lambda}_j(t)$ 有正实部的个数 $(M-k)$ 正好与向量 z 在 $t=1$ 给定值的分量个数一样.

条件 V 是有关初值 z^0 应满足的条件. 这时为了叙述加在边界条件 (4.90) 中的向量 z^0 上的这个要求 (我们仍然称之为条件V), 我们首先对 (4.89) 的第一组方程作变量替换 $\tau_i = \dfrac{t-i}{\mu}$, $i=0,1$, 并令 $y=\overline{y}(i)$, $t=i$. 当 $i=0$ 时我们得到曾在第二章称之为在点 $y=\overline{y}(0)$, $t=0$ 处的附加方程组

$$\frac{d\widetilde{z}}{d\tau_0} = F(\widetilde{z}, \widetilde{y}(0), 0). \tag{4.98}$$

显然, 点 $\widetilde{z} = \varphi(\overline{y}(0), 0)$ 是这个定常方程组的奇点, 但这时不同于第二章和第三章的是, 这个奇点已不再是渐近稳定奇点, 而由于 (4.96), 它现在是条件稳定奇点. 如果对方程组 (4.98) 作变量替换 $\widetilde{\zeta} = \widetilde{z} - \varphi(\overline{y}(0), 0)$, 并将 τ_0 看成 τ, 以及记 $F(\widetilde{\zeta} + \varphi(\overline{y}(0), 0), \overline{y}(0), 0)$ 为 $F(\widetilde{\zeta})$, 则 (4.98) 就成为

$$\frac{d\widetilde{\zeta}}{d\tau_0} = F(\widetilde{\zeta} + \varphi(\overline{y}(0), 0), \overline{y}(0), 0) \stackrel{\text{def}}{=} F(\widetilde{\zeta}), \tag{4.99}$$

这就是上面第三段讨论过的方程组 (4.57).

当 $i=1$ 时, 首先代替 (4.98) 我们有方程组

$$\frac{d\widetilde{\widetilde{z}}}{d\tau_1} = F(\widetilde{\widetilde{z}}, \overline{y}(1), 1); \tag{4.100}$$

其次利用替换 $\widetilde{\widetilde{\zeta}} = \widetilde{\widetilde{z}} - \varphi(\overline{y}(1), 1)$, 可得方程组

$$\frac{d\widetilde{\widetilde{\zeta}}}{d\tau_1} = F(\widetilde{\widetilde{\zeta}} + \varphi(\overline{y}(1), 1), \overline{y}(1), 1). \tag{4.101}$$

这也是 (4.57) 型的方程组.

当在第三段研究方程组 (4.57) 与它的积分流形 S^+, S^- 的关系时, 曾用过矩阵 B (亦即将 $A \equiv F_\zeta(0)$ 化成对角分块阵的矩阵), 那时我们曾要求 $\det B_{11} \neq 0$ (见 (4.64)) 及 $\det B_{22} \neq 0$.

我们现在考虑矩阵 $B(t)$, 它的列向量为 $\overline{F}_z(t)$ 的特征向量 (根据条件 (4.97) 知道, 对于每一个 t, 矩阵 $\overline{F}_z(t)$ 都有 M 个线性无关的特征向量) . 显然, 矩阵 $B(t)$ 将 $\overline{F}_z(t)$ 化成对角矩阵

$$B^{-1}(t)\overline{F}_z(t)B(t) = \operatorname{diag}\big(\overline{\lambda}_1(t), \cdots, \overline{\lambda}_M(t)\big),$$

(在此以及今后, 我们总是用 $\operatorname{diag}(a_1, \cdots, a_M)$ 记以 $a_1, \cdots, a_M$ 为对角元素的对角矩阵), 因此我们可以取 $B(0)$ 作为方程组 (4.99) 的矩阵 B, 而取 $B(1)$ 作为方程组

(4.101) 的矩阵 B; 于是我们所需要的条件 V 如下:

V. (a) 假设 $\det B_{11}(0) \neq 0, \det B_{22}(0) \neq 0$, 以及方程组 (4.99) 有满足上面第三段基本假设 1° 的不变流形 S^+ 而且

$$(z_1^0 - \varphi_1(\overline{y}(0), 0)) \in G^+;$$

(b) 假设 $\det B_{11}(1) \neq 0, \det B_{22}(1) \neq 0$, 以及方程组 (4.101) 有满足上面第三段基本假设 2° 的不变流形 S^- 而且

$$(z_2^0 - \varphi_2(\overline{y}(1), 1)) \in G^-;$$

其中根据第二段所使用的记号, $z_i^0, i = 1, 2$, 为列向量 z^0 的分块 (见 (4.90)), 而 φ_i 为列向量 φ 的分块.

注 条件 $\det B_{22}(0) \neq 0$ (不同于条件 $\det B_{11}(0) \neq 0$) 于 (4.99) 的积分流形 S^+ 的存在性和分析表达式问题并无关系, 而只与下面的定理 4.2 的证明方法有关; 对于条件 $\det B_{11}(1) \neq 0$ 也有同样的结论.

条件 V 的意义是容易理解的, 正像在渐近稳定时那样, 附加方程组 (4.98) 或 (4.99) 描述了方程组 (4.89) 的解在 $t = 0$ 邻域中的性质. 条件 (4.92) 只在 $t = 0$ 对向量 $\tilde{z}$ 给出了 k 个分量的值 (或向量 $\tilde{\zeta}$ 的 k 个分量, 即向量 (块) $\tilde{\zeta}$ 的值) . 对变量 $\tilde{\zeta}$ 来说, 这个条件也可以写成

$$\tilde{\zeta}_1(0) = z_1^0 - \varphi_1(\overline{y}(0), 0). \tag{4.102}$$

如果满足条件 V(a), 那么由 (4.102) 求出 $\tilde{\zeta}_1(0)$, 再从 (4.75) 可得 $\tilde{\zeta}_2(0)$ 而且有 $\tilde{\zeta}(0) \in S^+$. 因此从点 $\tilde{\zeta}(0)$ 出发的 (4.99) 的轨线当 $\tau_0 \to \infty$ 时趋于坐标原点, 而对应的 (4.98) 的轨线则趋于, $\varphi(\overline{y}(0), 0)$, 亦即方程组 (4.89) 满足初始条件 $z_0(0, \mu) = \tilde{\zeta}(0) + \varphi(\overline{y}(0), 0)$ 的解 $z_0(t, \mu)$ 落在 $\varphi(\overline{y}(t), t)$ 的邻域里; 这样求出的值 $z_0(0, \mu)$ 就是边值问题 (4.89) ~ (4.91) 的解 $z(t, \mu)$ 在 $t = 0$ 的零次近似 (下面验证) . 同样, 附加方程组 (4.100) 或 (4.101) 描述了边值问题的解在 $t = 1$ 邻域的性质. 在变量 $\tilde{\tilde{\zeta}}$ 之下, 条件 (4.93) 为

$$\tilde{\tilde{\zeta}}_2(0) = z_2^0 - \varphi_2(\overline{y}(1), 1). \tag{4.103}$$

如果满足条件 V(b), 则由 (4.103) 求出 $\tilde{\tilde{\zeta}}_2(0)$, 再从 (4.76) 可得 $\tilde{\tilde{\zeta}}_1(0)$, 而且 $\tilde{\tilde{\zeta}}(0) \in S^-$. 值 $\tilde{\tilde{\zeta}}(0) + \varphi(\overline{y}(1), 1)$ 就是 $z(t, \mu)$ 在点 $t = 1$ 的零次近似值.

注 由于问题的非线性性, 一般可能存在几个形式为 (4.75) 或 (4.76) 的分支; 这时对于每个分支来说, 当满足条件 I ~ V 时, 所有上述结论都是正确的, 因此所论边值问题的解就可能不唯一. 在 $\tilde{\zeta}_1(0) \overline{\in} G^+$ 的情况下, 所论问题的解就根本不存在. 图 4 说明了对于 $\tilde{\zeta}$ 为二维情况时的这两种可能性.

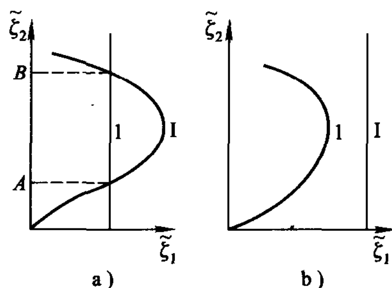


图 4 I—积分流形 S^+, 1—直线 $\widetilde{\zeta}_1=\widetilde{\zeta}_1(0)$. 在情况 (a) 中, 值 $\widetilde{\zeta}_1(0)$ 对应着 $\widetilde{\zeta}_2(0)$ 的两个值 (在 $\widetilde{\zeta}_2$ 轴上的点 A 和点 B), 在情况 (b) 中, 值 $\widetilde{\zeta}_1(0)$ 不对应着 $\widetilde{\zeta}_2(0)$ 的任何值.

五、构造渐近展开式的算法 第一章讨论过的边值问题 (1.14), (1.19), 只是上述问题的线性例子, 但这个例子说明了在所考虑区间两端的邻域中都有边界层.

从这个例子所指出的方向可以看出, 我们要找问题 (4.89) ~ (4.91) 的解已经不能像 (3.24) 那样只由两项相加, 而是由三项相加, 即

$$x(t,\mu)=\overline{x}(t,\mu)+\Pi x(\tau_0,\mu)+Qx(\tau_1,\mu), \tag{4.104}$$

其中

$$\overline{x}(t,\mu)=\overline{x}_0(t)+\mu\overline{x}_1(t)+\cdots+\mu^k\overline{x}_k(t)+\cdots. \tag{4.105}$$

$\Pi x(\tau_0,\mu)$ 仍然表示在 $t=0$ 邻域的边界函数, 并且可以展开成其系数依赖于 $\tau_0=\dfrac{t-0}{\mu}$ 的 μ 的幂级数:

$$\Pi x(\tau_0,\mu)=\Pi_0x(\tau_0)+\mu\Pi_1x(\tau_0)+\cdots+\mu^k\Pi_kx(\tau_0)+\cdots; \tag{4.106}$$

而 $Qx(\tau_1,\mu)$ 表示在 $t=1$ 邻域的边界函数, 并且可以展开成其系数依赖于 $\tau_1=\dfrac{t-1}{\mu}$ 的 μ 的幂级数:

$$Qx(\tau_1,\mu)=Q_0x(\tau_1)+\mu Q_1x(\tau_1)+\cdots+\mu^kQ_kx(\tau_1)+\cdots. \tag{4.107}$$

于是代替 (3.30), 我们有

$$\begin{cases}\mu\dfrac{d\overline{z}}{dt}+\dfrac{d\Pi z}{d\tau_0}+\dfrac{dQz}{d\tau_1}=\overline{F}+\Pi F+QF,\\[2mm] \mu\dfrac{d\overline{y}}{dt}+\dfrac{d\Pi y}{d\tau_0}+\dfrac{dQy}{d\tau_1}=\mu(\overline{f}+\Pi f+Qf);\end{cases} \tag{4.108}$$

其中

$$\overline{F}\overset{\text{def}}{=}F(\overline{z}(\mu,t),\overline{y}(\mu,t),t)=\overline{F}_0+\mu\overline{F}_1+\cdots+\mu^k\overline{F}_k+\cdots; \tag{4.109}$$

$$\begin{aligned}\Pi F\overset{\text{def}}{=}&F(\overline{z}(\mu\tau_0,\mu)+\Pi z(\tau_0,\mu),\overline{y}(\mu\tau_0,\mu)+\Pi y(\tau_0,\mu),\mu\tau_0)\\&-F(\overline{z}(\mu\tau_0,\mu),\overline{y}(\mu\tau_0,\mu),\mu\tau_0)\\=&\Pi_0F+\mu\Pi_1F+\cdots+\mu^k\Pi_kF+\cdots;\end{aligned} \tag{4.110}$$

$$
\begin{aligned}
QF &\stackrel{\text{def}}{=} F(\bar{z}(1+\mu\tau_1,\mu)+Qz(\tau_1,\mu),\bar{y}(1+\mu\tau_1,\mu)+Qy(\tau_1,\mu),1+\mu\tau_1)\\
&\quad -F(\bar{z}(1+\mu\tau_1,\mu),\bar{y}(1+\mu\tau_1,\mu),1+\mu\tau_1)\\
&= Q_0F+\mu Q_1F+\cdots+\mu^kQ_kF+\cdots.
\end{aligned}
\tag{4.111}
$$

类似地还有 $\bar{f},\Pi f,Qf$. 但是应当注意的是与 (3.30) 相比, 两者存在着一定的差别. 在第三章中, $\bar{F}+\Pi F$ 是用恒等的形式进行变换:

$$
F(\bar{z}+\Pi z,\bar{y}+\Pi y,t)\equiv\bar{F}+\Pi F \tag{4.112}
$$

得到的, 可现在却是

$$
F(\bar{z}+\Pi z+Qz,\bar{y}+\Pi y+Qy,t)\neq\bar{F}+\Pi F+QF; \tag{4.113}
$$

而且只能把 (4.108) ~ (4.111) 看成是推导出 (4.105) ~ (4.107) 各系数计算公式的出发点. 我们可以这样来考虑问题, 即除了在 $t=1$ 的某个邻域之外, Q 函数是处处可以忽略的小量, 因此可以认为 (4.113) 在 $t=1$ 的邻域外是一个近似等式, 亦即几乎就是 (4.112). 交换 Π 和 Q 的作用, 即可得出在 $t=1$ 的邻域中 (4.113) 也是一个近似等式的正确性.

关于 ΠF 展开式的系数, 完全类似于展开式 (3.29), 只是应将 τ 改成 τ_0; 而对 QF 也有类似的表达式, 只是应当用 $t=1$ 和 τ_1 分别代替 $t=0$ 和 τ. 对于 Πf 和 Qf 也完全类似.

将 (4.104) 代入边界条件 (4.90) (利用 (4.92), (4.93) 的形式) 和 (4.91), 于是代替 (2.38) 有

$$
a[\bar{z}_0(0)+\cdots+\mu^k\bar{z}_k(0)+\cdots+\Pi_0z(0)+\cdots+\mu^k\Pi_kz(0)+\cdots]=az^0; \tag{4.114}
$$

$$
b[\bar{z}_0(1)+\cdots+\mu^k\bar{z}_k(1)+\cdots+Q_0z(0)+\cdots+\mu^kQ_kz(0)+\cdots]=bz^0; \tag{4.115}
$$

$$
\bar{y}_0(0)+\cdots+\mu^k\bar{y}_k(0)+\cdots+\Pi_0y(0)+\cdots+\mu^k\Pi_ky(0)+\cdots]=y^0. \tag{4.116}
$$

现在我们来写出确定 (4.105) ~ (4.107) 系数的方程; 为此首先将 (4.108) 两端按 t,τ_0 和 τ_1 对应分开, 然后再令两端关于 μ 的同次幂系数相等, 于是对于 t 的零次近似为

$$
0=\bar{F}_0\stackrel{\text{def}}{=}F(\bar{z}_0,\bar{y}_0,t),\quad \frac{d\bar{y}_0}{dt}=\bar{f}_0\stackrel{\text{def}}{=}f(\bar{z}_0,\bar{y}_0,t); \tag{4.117}
$$

这就是退化方程组 (4.94). 对于 τ_0 和 τ_1 的零次近似为:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Pi_0z}{d\tau_0}&=\Pi_0F\stackrel{\text{def}}{=}F(\bar{z}_0(0)+\Pi_0z,\bar{y}_0(0)+\Pi_0y,0)-F(\bar{z}(0),\bar{y}(0),0)\\
&=F(\bar{z}_0(0)+\Pi_0z,\bar{y}_0(0)+\Pi_0y,0),\quad \frac{d\Pi_0y}{d\tau_0}=0;
\end{aligned}
\tag{4.118}
$$

$$\frac{dQ_0z}{d\tau_1} = Q_0F \overset{\text{def}}{=} F(\overline{z}_0(1) + Q_0z, \overline{y}_0(1) + Q_0y, 1) - F(\overline{z}_0(1), \overline{y}_0(1), 1)$$
$$= F(z_0(1) + Q_0z, \overline{y}_0(1) + Q_0y, 1), \quad \frac{dQ_0y}{d\tau_1} = 0. \tag{4.119}$$

有关这些方程组的定解条件可由 (4.114) ~ (4.116) 的零次近似得出, 亦即

$$a(\overline{z}_0(0) + \Pi_0z(0)) = az^0; \tag{4.120}$$

$$b(\overline{z}_0(1) + Q_0z(0)) = bz^0; \tag{4.121}$$

$$\overline{y}_0(0) + \Pi_0y(0) = y^0. \tag{4.122}$$

由 (4.118) 和 (4.119) 即知, $\Pi_0y(\tau_0) \equiv$ 常数, $Q_0y(\tau_1) \equiv$ 常数. 又由于当 $\tau_0 \to \infty$ 和 $\tau_1 \to -\infty$ 时, $\Pi_0y(\tau_0)$ 和 $Q_0y(\tau_1)$ 都应当趋于零, 因此这些常数都应等于零, 即

$$\Pi_0y(\tau_0) \equiv 0, \quad Q_0y(\tau_1) \equiv 0; \tag{4.123}$$

特别由此得出 $\Pi_0y(0) = 0$, 从而由 (4.122) 有

$$\overline{y}_0(0) = y^0. \tag{4.124}$$

于是由方程组 (4.117) 与条件 (4.124) 一起即可求出解 $\overline{y}_0(t), \overline{z}_0(t) = \varphi(\overline{y}_0(t), t)$, 这是由第四段给出的关于退化问题 (4.94), (4.95) 在 [0, 1] 上有唯一解的条件 III 得出的.

下面考虑边值问题 (4.118), (4.120). 由 (4.123) 即得

$$\frac{d\Pi_0z}{d\tau_0} = F(\overline{z}_0(0) + \Pi_0z, \overline{y}_0(0), 0); \tag{4.125}$$

由于条件 (4.120) 只给出向量 $\Pi_0z(0)$ 的前 k 个分量, 因此为了完全确定 (4.125) 的解, 我们还要求当 $\tau_0 \to \infty$ 时有 $\Pi_0z(\tau_0) \to 0$, 亦即

$$\Pi_0z(\infty) = 0. \tag{4.126}$$

问题 (4.125), (4.120), (4.126) 的解的存在唯一性是由如下事实推出的, 即 (4.125), (4.120) 分别与 (4.99), (4.102) 一致, 于是根据 V(a) 即知在不变流形 S^+ 上存在由 (4.120) 所确定的初始点, 且由引理 4.2 可知从这点出发的方程组 (4.125) 的轨线保证满足 (4,126). 根据 V(b), 同样可以得到方程组 (4.119) 同时满足条件 (4.121) 和 $Q_0z(-\infty) = 0$ 的右端界函数 $Q_0z(\tau_1)$ 的存在性.

现在考虑关于 $\Pi_1x(\tau_0)$ 和 $\overline{x}_1(t)$ 的方程组及其定解条件

$$\frac{d\Pi_1z}{d\tau_0} = \Pi_1F \overset{\text{def}}{=} F_z(\tau_0)\Pi_1z + F_y(\tau_0)\Pi_1y + G_1(\tau_0), \tag{4.127}$$

$$\frac{d\Pi_1y}{d\tau_0} = \Pi_0f; \tag{4.128}$$

正像在 (3.34) 那样, 这里 $F_z(\tau_0) \stackrel{\text{def}}{=} F_z(\overline{z}_0(0)+\Pi_0 z(\tau_0), \overline{y}_0(0), 0)$; $F_y(\tau_0)$ 也有类似的意义. 而 $G_1(\tau_0)$ 仍然由 (3.35) 给出.

$$\frac{d\overline{z}_0}{dt} = \overline{F}_z(t)\overline{z}_1 + \overline{F}_y(t)\overline{y}_1, \quad \frac{d\overline{y}_1}{dt} = \overline{f}_z(t)\overline{z}_1 + \overline{f}_y(t)\overline{y}_1; \tag{4.129}$$

如同 (3.33), 这里 $\overline{F}_z(t) \stackrel{\text{def}}{=} F_z(\overline{z}_0(t), \overline{y}_0(t), t)$; $\overline{F}_y(t), \overline{f}_z(t), \overline{f}_y(t)$ 也有同样的意义.

$$a(\overline{z}_1(0) + \Pi_1 z(0)) = 0; \tag{4.130}$$

$$\overline{y}_1(0) + \Pi_1 y(0) = 0. \tag{4.131}$$

此外我们还要求

$$\Pi_1 z(\infty) = 0; \tag{4.132}$$

$$\Pi_1 y(\infty) = 0. \tag{4.133}$$

完全像在第三章那样, 从 (4.128), (4.131), (4.133) 可得

$$\Pi_1 y(\tau_0) = -\int_{\tau_0}^{\infty} \Pi_0 f(s) ds, \quad \Pi_1 y(0) = -\int_0^{\infty} \Pi_0 f(s) ds; \tag{4.134}$$

$$\overline{y}_1(0) = \int_0^{\infty} \Pi_0 f(s) ds. \tag{4.135}$$

条件 (4.135) 完全决定了方程组 (4.129) 的解 $\overline{x}_1(t)$. 将 (4.134) 代入 (4.127) 之后, 即见 (4.127) 中只剩下 $\Pi_1 z(\tau_0)$ 是未知的; 但是边值问题 (4.127), (4.130) 是否存在满足补充条件 (4.132) 的解 $\Pi_1 z(\tau_0)$? 我们把这个问题留到下面第七段再讨论, 在那里将给出 Π 函数和 Q 函数的估计.

关于 $Q_1 x(\tau_1)$ 的方程组和定解条件为

$$\frac{dQ_1 z}{d\tau_1} = F_z(\tau_1) Q_1 z + F_y(\tau_1) Q_1 y + H_1(\tau_1), \quad \frac{dQ_1 y}{d\tau_1} = Q_0 f(\tau_1); \tag{4.136}$$

$$b(\overline{z}_1(1) + Q_1 z(0)) = 0; \tag{4.137}$$

其中 $F_z(\tau_1) \stackrel{\text{def}}{=} F_z(\overline{z}_0(1) + Q_0 z(\tau_1), \overline{y}_0(1), 1)$, 而 $H_1(\tau_1)$ 的结构与 (4.127) 中的 $G_1(\tau_0)$ 类似.

$$Q_1 z(-\infty) = 0; \tag{4.138}$$

$$Q_1 y(-\infty) = 0. \tag{4.139}$$

由条件 (4.139) 立即求得 $Q_1 y(\tau_1) = -\int_{\tau_1}^{-\infty} Q_0 f(s) ds$. 其次在 (4.137) 中, $\overline{z}_1(1)$ 已由问题 (4.129), (4.135) 的解所决定, 因此 $Q_1 z(\tau_1)$ 可以从问题 (4.136) ~ (4.138) 得到, 这与从问题 (4.127), (4.130), (4.132) 求出 $\Pi_1 z(\tau_0)$ 的过程完全相类似.

对于 $k>0$, 关于 $\Pi_k x(\tau_0), Q_k x(\tau_1)$ 以及 $\overline{x}_k(t)$ 的方程组和定解条件为:

$$\frac{d\Pi_k z}{d\tau_0}=\Pi_k F, \tag{4.140}$$

$$\frac{d\Pi_k y}{d\tau_0}=\Pi_{k-1} f; \tag{4.141}$$

$$\frac{dQ_k z}{d\tau_1}=Q_k F, \quad \frac{dQ_k y}{d\tau_1}=Q_{k-1} f; \tag{4.142}$$

$$\frac{d\overline{z}_{k-1}}{dt}=\overline{F}_k, \quad \frac{d\overline{y}_k}{dt}=\overline{f}_k; \tag{4.143}$$

$$a(\overline{z}_k(0)+\Pi_k z(0))=0, \tag{4.144}$$

$$b(\overline{z}_k(1)+Q_k z(0))=0, \tag{4.145}$$

$$\overline{y}_k(0)+\Pi_k y(0)=0;$$

$$\Pi_k z(\infty)=0, \quad \Pi_k y(\infty)=0; \tag{4.146}$$

$$Q_k z(-\infty)=0, \quad Q_k y(-\infty)=0; \tag{4.147}$$

$$\overline{y}_k(0)=\int_0^\infty \Pi_{k-1} f(s)ds. \tag{4.148}$$

像在 $k=0,1$ 时所进行的讨论那样, 方程组 (4.141) 不依赖于 (4.140), 因而有

$$\Pi_k y(\tau_0)=-\int_{\tau_0}^\infty \Pi_{k-1} f(s)ds;$$

同样有

$$Q_k y(\tau_1)=-\int_{\tau_1}^{-\infty} Q_{k-1} f(s)ds.$$

因此剩下的是求解问题 (4.143), (4.148); (4.140), (4.144), (4.146) 以及 (4.142), (4.145), (4.147). 这些问题的求解过程与 $k=1$ 时所进行的讨论完全类似.

六、基本定理的叙述 像在第三章 §10 那样, 我们对 (4.89) 的右端函数给出确切的光滑性条件 I. 为此我们首先给出如下由三条线段组成的曲线 L_0 :

$$L_{01}=\{(z,y,t):\ z=\overline{z}_0(0)+\Pi_0 z(\tau_0),\ \tau_0\geqslant 0; y=\overline{y}_0(0); t=0\},$$

$$L_{02}=\{(z,y,t):\ z=\overline{z}_0(t), y=\overline{y}_0(t), 0\leqslant t\leqslant 1\},$$

$$L_{03}=\{(z,y,t):\ z=\overline{z}_0(1)+Q_0 z(\tau_1),\ \tau_1\leqslant 0;\ y=\overline{y}_0(1);\ t=1\}.$$

I. 假设函数 $F(z,y,t)$, $f(z,y,t)$ 在曲线 L_0 的某个 δ-邻域中, 具有直到包括 $(n+2)$ 阶在内的连续偏导数.

在此条件下, 我们考虑展开式 (4.105) ~ (4.107) 中直到包括 n 在内的项, 并用 $X_n(t,\mu)$ 表示展开式 (4.104) 的 n 阶部分和:

$$X_n(t,\mu) = \sum_{k=0}^{n} \mu^k [\overline{x}_k(t) + \Pi_k x(\tau_0) + Q_k x(\tau_1)]. \tag{4.149}$$

定理 4.2 当满足条件 I ~ V 时, 必存在常数 $\mu_0 > 0, \delta > 0, c > 0$, 使得当 $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时, 在曲线 L_0 的 δ-邻域中存在边值问题 (4.89) ~ (4.91) 的唯一解 $x(t,\mu)$, 且满足不等式:

$$\| x(t,\mu) - X_n(t,\mu) \| \leqslant c\mu^{n+1}, \quad \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{4.150}$$

注 如果只考虑解的存在唯一性问题, 则在条件 I 中只需假设 $n = 0$.

七、边界函数的估计

引理 4.6 对于边界函数 $\Pi_i x(\tau_0)$ 和 $Q_i x(\tau_1)$, $i = 0, 1, \cdots, n$, 满足下列不等式:

$$\| \Pi_i x(\tau_0) \| \leqslant c \exp(-\kappa\tau_0), \quad \text{当 } \tau_0 \geqslant 0; \tag{4.151}$$

$$\| Q_i x(\tau_1) \| \leqslant c \exp(\kappa\tau_0), \quad \text{当 } \tau_1 \leqslant 0. \tag{4.152}$$

证明 我们从 $i - 0$ 开始. 根据 (4.123) 有 $\Pi_0 y(\tau_0) \equiv 0$. 对于 $\Pi_0 z(\tau_0)$, 我们注意到确定 $\Pi_0 z(\tau_0)$ 的方程组 (4.125) 是与满足条件 V(a) 的方程组 (4.99) 完全一样. 而且点 $\Pi_0 z(0)$ 位于 S^+ 上, 因此由引理 4.2 立即得到对 $\Pi_0 z(\tau_0)$ 所需要的估计. 关于 $Q_0 x(\tau_1)$ 的情形完全类似.

我们现在转到对 $\Pi_1 x(\tau_0)$ 的估计; 这些向量函数是由方程组 (4.127), (4.128) 所决定, 其中 $G_1(\tau_0)$ 的表达式与第三章 §10 的第 3 段一样, 因此同样有像在那里得到的结论: 对 $\tau_0 \geqslant 0$ 有

$$\| G_1(\tau_0) \| \leqslant c \exp(-\kappa\tau_0).$$

其次, 像在第三章 §10 第 3 段那样, 从 (4.134) 再一次得到 $\Pi_1 y(\tau_0)$ 的估计:

$$\| \Pi_1 y(\tau_0) \| \leqslant c \exp(-\kappa\tau_0),$$

当 $\tau_0 \geqslant 0$. 从而对于 $\Pi_1 z(\tau_0)$ 我们有如 (3.74) 的方程组:

$$\frac{d\Pi_1 z}{d\tau_0} \doteq F_z(\tau_0)\Pi_1 z + \widetilde{G}_1(\tau_0), \tag{4.153}$$

这里对 $\tau_0 \geqslant 0$ 有

$$\| \widetilde{G}_1(\tau_0) \| \leqslant c \exp(-\kappa\tau_0).$$

根据 (4,130) 和 (4.132), $\Pi_1 z(\tau_0)$ 的定解条件为

$$a\Pi_1 z(0) = -a\overline{z}_1(0), \quad \Pi_1 z(\infty) = 0. \tag{4.154}$$

不难看出, 问题 (4.153), (4.154) 就是在引理 4.5 中所讨论的问题, 由此得出对 $\Pi_1 z(\tau_0)$ 的 (4.151) 估计式, 即对 $\tau_0 \geqslant 0$ 有

$$\| \Pi_1 z(\tau_0) \| \leqslant c \exp(-\kappa \tau_0).$$

由于对 $\tau_0 \geqslant 0$ 有 $\Pi_0 z(\tau_0)$ 位于流形 S^+ 上, 所以在第三章 §10 第 3 段中关于 $\Pi_1 x(\tau)$ 所进行的一切讨论对 $\Pi_1 x(\tau_0)$ 仍然是正确的; 利用与第三章 §10 第 3 段完全一样的讨论过程, 即可推出所有下标号码 $k \geqslant 2$ 的 Π 函数估计. 这就完成了估计式 (4.151) 的证明. 至于不等式 (4.152), 可用完全类似的方法得到. □

八、余项方程 令

$$u(t,\mu) = z(t,\mu) - Z_n(t,\mu), \quad v(t,\mu) = y(t,\mu) - Y_n(t,\mu);$$

这里的 $Z_n(t,\mu), Y_n(t,\mu)$ 是由公式 (4.149) 确定, 即

$$Z_n(t,\mu) = \sum_{k=0}^{n} \mu^k [\overline{z}_k(t) + \Pi_k z(\tau_0) + Q_k z(\tau_1)],$$
$$Y_n(t,\mu) = \sum_{k=0}^{n} \mu^k [\overline{y}_k(t) + \Pi_k y(\tau_0) + Q_k y(\tau_1)].$$

余项 u 和 v 满足下列方程组和定解条件:

$$\begin{cases} \mu \dfrac{du}{dt} = F(u + Z_n, v + Y_n, t) - \mu \dfrac{dZ_n}{dt}, \\ \dfrac{dv}{dt} = f(u + Z_n, v + Y_n, t) - \dfrac{dY_n}{dt}; \end{cases} \tag{4.155}$$

$$\begin{cases} au(0,\mu) = -a \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mu^k Q_k z(-\frac{1}{\mu}), \\ bu(1,\mu) = -b \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mu^k \Pi_k z(\frac{1}{\mu}), \\ v(0,\mu) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mu^k Q_k y(-\frac{1}{\mu}). \end{cases} \tag{4.156}$$

不同于 (3.86), 这些余项满足了非零的定解条件 (4.156); 但是由于 (4.151), (4.152), 显然 (4.156) 的右端是一些指数式小的量. 与 (3.88) 完全一样, 我们在此同样引进函数 $H_1(t,\mu)$ 和 $H_2(t,\mu)$, 但不同于 (3.89), 现在这两个函数对 $t \in [0, 1]$, $\mu \in (0, \mu_0]$ 应满足估计:

$$\begin{cases} \| H_1(t,\mu) \| \leqslant c \mu^{n+1}, \\ \| H_2(t,\mu) \| \leqslant c\Big[\mu^{n+1} + \mu^n \exp(-\frac{\kappa t}{\mu}) + \mu^n \exp(-\frac{\kappa(1-t)}{\mu})\Big]. \end{cases} \tag{4.157}$$

(4.157) 的证明可采用在第三章中证明 (3.89) 时完全一样的方法进行, 而且也是应用类似的技巧, 在此我们不再重复.

练习 对估计式 (4.157) 进行详细证明.

我们现在将 (4.155) 写成类似于第二章中 (3.92) 的形式:

$$\begin{cases} \mu\dfrac{du}{dt} = F_z(t,\mu)u + F_y(t,\mu)v + G_1(u,v,t,\mu), \\ \dfrac{dv}{dt} = f_z(t,\mu)u + f_y(t,\mu)v + G_2(u,v,t,\mu); \end{cases} \tag{4.158}$$

其中矩阵 $F_z(t,\mu), F_y(t,\mu), f_z(t,\mu), f_y(t,\mu)$ 的元素都是在点 $(\overline{z}_0(t)+\Pi_0 z(\tau_0), \overline{y}_0(t), t)$ 处进行计算的, 而非齐次项 G_1, G_2 为

$$G_1(u,v,t,\mu) \overset{\text{def}}{=} F(u+Z_n, v+Y_n, t) - \mu\frac{dZ_n}{dt} - F_z(t,\mu)u - F_y(t,\mu)v,$$

$$G_2(u,v,t,\mu) \overset{\text{def}}{=} f(u+Z_n, v+Y_n, t) - \frac{dY_n}{dt} - f_z(t,\mu)u - f_y(t,\mu)v.$$

我们注意到函数 G_1 和 G_2 两条对今后来讲是重要的性质, 而且可以像在第三章那样对它们进行证明.

1. 当 $0 \leqslant t \leqslant 1, 0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时有

$$\begin{cases} \| G_1(0,0,t,\mu) \| = \| H_1(t,\mu) \| \leqslant c\,\mu^{n+1}, \\ \| G_2(0,0,t,\mu) \| = \| H_2(t,\mu) \| \leqslant c\Big(\mu^{n+1} + \mu^n e^{-\frac{\kappa t}{\mu}} + \mu^n e^{\frac{\kappa(t-1)}{\mu}}\Big). \end{cases} \tag{4.159}$$

2. 对 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \mu_0 = \mu_0(\varepsilon) > 0$, 使得只要 $\| u_1 \| \leqslant \delta, \| u_2 \| \leqslant \delta, \| v_1 \| \leqslant \delta, \| v_2 \| \leqslant \delta, 0 < \mu \leqslant \mu_0$, 则对 $i = 1, 2$ 有

$$\| G_i(u_1,v_1,t,\mu) - G_i(u_2,v_2,t,\mu) \| \leqslant \varepsilon(\| u_1 - u_2 \| + \| v_1 - uv_2 \|). \tag{4.160}$$

我们还需要进行如下变换, 即把 $F_z(t,\mu) \equiv F_z(\overline{z}_0(t)+\Pi_0 z(\tau_0)+Q_0 z(\tau_1), \overline{y}_0(t), t)$ 写成形式:

$$F_z(t,\mu) = \overline{F}_z(t) + \Pi_0 F_z + Q_0 F_z + O(\mu),$$

其中按照第五段的记号有

$$\overline{F}_z(t) = F_z(\overline{z}_0(t), \overline{y}_0(t), t),$$

$$\Pi_0 F_z(\tau_0) = F_z(\overline{z}_0(0)+\Pi_0 z(\tau_0), \overline{y}_0(0), 0) - F_z(\overline{z}_0(0), \overline{y}_0(0), 0),$$

$$Q_0 F_z(\tau_1) = F_z(\overline{z}_0(1)+Q_0 z(\tau_1), \overline{y}_0(1), 1) - F_z(\overline{z}_0(1), \overline{y}_0(1), 1).$$

于是 (4.158) 可以写成

$$\begin{cases} \mu\dfrac{du}{dt} = \left[\overline{F}_z(t) + \Pi_0 F_z(\tau_0) + Q_0 F_z(\tau_1)\right]u + F_y(t,\mu)v + G_1(u,v,t,\mu), \\ \dfrac{dv}{dt} = f_z(t,\mu)u + f_y(t,\mu)v + G_2(u,v,t,\mu); \end{cases} \tag{4.161}$$

这里的 $G_i, i = 1, 2$, 不同于 (4.158) 中的 G_i, 不过它们之间的差别只在量阶为 $O(\mu)$ 的项, 因此对于这里的 G_i 来说, 不等式 (4.159) 和 (4.160) 仍然成立, 所以我们使用了同一记号 G_i.

定解条件 (4.156) 可以写成

$$au(0,\mu) = au^0, \quad bu(1,\mu) = bu^0; \tag{4.162}$$

$$v(0,\mu) = v^0; \tag{4.163}$$

由于 (4.156) 的右端是指数式小的量, 所以在这里可以认为对任意的 n 有

$$\| au^0 \| + \| bu^0 \| + \| v^0 \| \leqslant c\,\mu^{n+1}. \tag{4.164}$$

在下面的第十段中, 我们将把问题 (4.161) ~ (4.163) 转化成积分方程组问题, 然后像在第三章那样, 对积分方程组应用逐次逼近法; 为此, 在下面的第九段将进行某些必要的构造准备.

九、矩阵 Green 函数 (1) 考虑线性方程组

$$\mu\frac{du}{dt} = A(t,\mu)u + f(t,\mu), \tag{4.165}$$

其中矩阵 $A(t,\mu)$ 和向量函数 $f(t,\mu)$ 在 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2, 0 < \mu \leqslant \mu_0$ 上有界连续. 对于 $u(t,\mu)$ 要求满足边界条件:

$$au(t_1,\mu) = 0, \quad bu(t_2,\mu) = 0; \tag{4.166}$$

这里的矩阵 a 和 b 与 (4.92), (4.93) 一样.

我们称定义在 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2, t_1 \leqslant s \leqslant t_2$ 上的矩阵 $G(t,s,\mu)$ 为边值问题 (4.165), (4.166) 的矩阵 Green 函数, 如果满足下列条件:

1°. $G(t,s,\mu)$ 作为 t 的函数是对应于 (4.615) 的齐次方程

$$\mu\frac{du}{dt} = A(t,\mu)u \tag{4.167}$$

在区间 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ 上除了点 $t = s$ 之外的解.

2°. $G(t,s,\mu)$ 满足边界条件 (4.166) :

$$aG(t_1,s,\mu) = 0, \quad bG(t_2,s,\mu) = 0.$$

3°. $G(t,s,\mu)$ 的对角元素在 $t=s$ 处有跃度等于 1 的第一类间断点, 即

$$G(s+0,s,\mu)-G(s-0,s,\mu)=E_M.$$

如所周知, 若边值问题 (4.167), (4.166) 只有零解, 则矩阵 Green 函数 $G(t,s,\mu)$ 存在、唯一, 而且边值问题 (4.165), (4.166) 的解也存在、唯一且可写成

$$u(t,\mu)=\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{\mu}G(t,s,\mu)f(s,\mu)ds. \tag{4.168}$$

(2) 现在我们在区间 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上研究方程组 (4.165) 和 (4.167), 我们假设矩阵 $A(t,\mu)$ 具有如下形式

$$A(t,\mu)=\overline{A}(t)+\Delta_0(\tau_0)+\Delta_1(\tau_1),\quad \tau_0=\frac{t}{\mu},\quad \tau_1=\frac{t-1}{\mu},$$

而且满足下列条件:

1°. $\overline{A}(t)$ 在 $0\leqslant t\leqslant 1$ 上有定义且二次连续可微, 而它的特征值 $\overline{\lambda}_i(t)$ 满足条件 (4.96), (4.97).

2°. $\Delta_0(\tau_0)$ 和 $\Delta_1(\tau_1)$ 分别对 $\tau_0\geqslant 0$ 和 $\tau_1\leqslant 0$ 有定义、连续且满足不等式

$$\begin{cases}\|\Delta_0(\tau_0)\|\leqslant c\exp(-\kappa\tau_0), & \text{当 } \tau_0\geqslant 0,\\ \|\Delta_1(\tau_1)\|\leqslant c\exp(\kappa\tau_1), & \text{当 } \tau_1\leqslant 0.\end{cases} \tag{4.169}$$

3°. 方程

$$\frac{du}{d\tau_0}=[\overline{A}(0)+\Delta_0(\tau_0)]u,\quad \tau_0\geqslant 0 \tag{4.170}$$

不存在满足条件

$$au(0)=0,\quad u(\infty)=0 \tag{4.171}$$

的非零解; 而方程

$$\frac{du}{d\tau_1}=[\overline{A}(1)+\Delta_1(\tau_1)]u,\quad \tau_1\leqslant 0$$

不存在满足条件

$$bu(0)=0,\quad u(-\infty)=0$$

的非零解.

令矩阵 $B(t)$ 的列向量为矩阵 $\overline{A}(t)$ 的特征向量; 于是矩阵 $B(t)$ 将 $\overline{A}(t)$ 变成对角形式:

$$B^{-1}(t)\overline{A}(t)B(t)=\mathrm{diag}(\overline{\lambda}_1(t),\cdots,\overline{\lambda}_M(t))\equiv\Lambda(t). \tag{4.172}$$

此外, 我们还要求满足条件:

4°. $\det B_{11}(0)\neq 0,\ \det B_{22}(0)\neq 0;\quad \det B_{11}(1)\neq 0,\ \det B_{22}(1)\neq 0.$

注　容易验证方程组 (4.161) 中的矩阵 $A(t,\mu)\equiv\overline{F}_z(t)+\Pi_0F_z(\tau_0)+Q_0F_z(\tau_1)$ 满足条件 $1^\circ\sim4^\circ$. 特别, 引理 4.4 的结果保证了条件 3° 的成立, 而由条件 V 即知 4° 成立.

我们把区间 $[0,1]$ 分成三部分: $[0,t_0],[t_0,t_1]$ 以及 $[t_1,1]$, 其中 $t_0=a_0\mu|\ln\mu|,t_1=1-a_1\mu|\ln\mu|$, 而且以后当 $\mu\to0$ 时, 将把 $a_0>0,a_1>0$ 取成固定、但充分大的数. 从定义本身即知当 $\mu\to0$ 时有: $t_0\to0$, $t_1\to1$, $\overline{\tau}_0=t_0/\mu=a_0\mid\ln\mu\mid\to\infty,\overline{\tau}_1=(t_1-1)/\mu=-a_1\mid\ln\mu\mid\to-\infty$.

本节的主要目的是在上述三个区间的每一个上构造齐次方程组 (4.167) 在 (4.166) 型而是非齐次的边界条件之下的解, 以及在三个区间的每一个上构造方程组 (4.165) 在形如 (4.166) 的边界条件下的矩阵 Green 函数.

(3) 区间 $[t_0,\,t_1]$.

(a) 我们首先在区间 $[t_0,\,t_1]$ 上考虑齐次方程组 (4.167), 这时选取 a_0 和 a_1 这样大, 使得它们满足不等式

$$\|\Delta_i(\tau_i)\|\leqslant c\mu^2,\quad 当\, t_0\leqslant t\leqslant t_1\ (i=0,1).\tag{4.173}$$

显然, a_0,a_1 的这种选法是可能的, 因为由 (4.169) 有

$$\|\Delta_0(\tau_0)\|\leqslant c\mu^{\kappa a_0},\quad 当\,\tau_0\geqslant\overline{\tau}_0\ (t\geqslant t_0),$$

$$\|\Delta_1(\tau_1)\|\leqslant c\mu^{\kappa a_1},\quad 当\,\tau_1\leqslant\overline{\tau}_1\ (t\leqslant t_1).$$

利用构造线性方程组基本解组的熟知方法, 我们在区间 $[t_0,\,t_1]$ 上对 (4.167) 构造其基本解组. 做变量替换 $u=T(t,\mu)\eta$, 将 (4.167) 变成 (一撇表示对 t 的求导) :

$$\mu\frac{d\eta}{dt}=(T^{-1}AT-\mu T^{-1}T')\eta.\tag{4.174}$$

设 $T(t,\mu)=B(t)(E_M+\mu B_1(t))$, 这里 $B(t)$ 是上面引进的、其列为矩阵 $\overline{A}(t)$ 特征向量的矩阵, 而作为 $B_1(t)$, 我们取其元素为

$$B_1^{ij}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\overline{\lambda}_i(t)-\overline{\lambda}_j(t)}\Big(B^{-1}(t)B'(t)\Big)^{ij}, & 当\, i\neq j,\\ 0, & 当\, i\neq j.\end{cases}$$

于是即得等式

$$T^{-1}\overline{A}T-\mu T^{-1}T'=\Lambda(t)+\mu D_1(t)+\mu^2D_2(t,\mu),\tag{4.175}$$

其中 $\Lambda(t)$ 是由公式 (4.172) 所定义, 而

$$D_1(t)=\operatorname{diag}(d_1(t),\cdots,d_M(t)),\quad d_i(t)=-(B^{-1}(t)B'(t))^{ii},$$

$$D_2(t,\mu)=\big[E_M+\mu B_1(t)\big]^{-1}\big[-B^{-1}(t)B'(t)B_1(t)-B_1'(t)-B_1(t)D_1(t)\big].$$

练习 验证 (4.175) 的正确性. 提示: 比较 μ 的同次幂系数, 容易证明等价的等式: $T(\Lambda + \mu D_1 + \mu^2 D_2) = \overline{A}T - \mu T'$.

注 由于在上面所考虑的等式中出现了 $B'(t)$ 和 $B_1'(t)$, 因此就产生了矩阵 $\overline{A}(t)$ 的特征向量函数的光滑性 (即 $B(t)$ 的光滑性) 与矩阵 $\overline{A}(t)$ 本身的光滑性之间的关系问题. 由于条件 1°, 每个 $\overline{\lambda}_i(t)$ 都对应着一个特征向量, 其坐标可以认为, 好比说, 是矩阵 $(\overline{A}(t) - \overline{\lambda}_i(t)E_M)$ 的行列式某一行的代数余子式, 只要这些代数余子式的平方和在 $[0,1]$ 上处处不为零即可. 这时特征向量的光滑性阶数 (即 $B(t)$ 的光滑性阶数) 将与 $\overline{A}(t)$ 的光滑性阶数一样. 但是可能出现不存在其代数余子式的平方和在 $[0,1]$ 上处处不等于零的行, 虽然对于每个固定的 t, 其代数余子式的平方和不为零的行必定存在. 于是特征向量的光滑性问题就复杂化了. 然而这时可以构造与矩阵 $\overline{A}(t)$ 的光滑性一样的特征向量函数 (参看 [37]).

我们回到方程组 (4.174), 现在可将其写成

$$\mu\frac{d\eta}{dt} = \Big(\Lambda(t) + \mu D_1(t) + \mu^2 \widetilde{D}_2(t,\mu)\Big)\eta, \tag{4.176}$$

这里 $\mu^2\widetilde{D}_2 = \mu^2 D_2 + T^{-1}(\Delta_0 + \Delta_1)T$. 由于 (4.173), 对 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 有 $\mu^2\widetilde{D}_2(t,\mu)$ 满足不等式 $\| \mu^2\widetilde{D}_2(t,\mu) \| \leqslant c\mu^2$.

我们找 (4.176) 形如

$$\eta_i(t,\mu) = \alpha_i(t,\mu)\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t_1}\lambda_i(s,\mu)ds\right), \quad i = 1,\cdots,M \tag{4.177}$$

的基本解组, 其中 $\alpha_i(t,\mu)$ 为新的未知向量函数, 而 $\lambda_i(t,\mu) = \overline{\lambda}_i(t) + \mu d_i(t)$. 将 (4.177) 代入 (4.176) 即得关于 $\alpha_i(t,\mu)$ 的方程

$$\mu\frac{d\alpha_i}{dt} = \Big(\Lambda(t) + \mu D_1(t) - \lambda_i(t,\mu)E_M\Big)\alpha_i + \mu^2\widetilde{D}_2(t,\mu)\alpha_i.$$

我们取 $\alpha_i(t,\mu)$ 的定解条件为 (上标表示向量的分量号码) :

$$\begin{aligned}
&\alpha_i^j(t_0,\mu) = 0, \quad j = 1,\cdots,i-1,\\
&\alpha_i^i(t_1,\mu) = 1,\\
&\alpha_i^j(t_1,\mu) = 0, \quad j = i+1,\cdots,M.
\end{aligned}$$

我们转到等价的积分方程组

$$\alpha_i^j(t,\mu) = \int_{t_0}^t \exp\Big(\frac{1}{\mu}\int_s^t (\lambda_j(s,\mu) - \lambda_i(s,\mu))ds\Big)\mu\Big[\widetilde{D}_2(s,\mu)\alpha_i(s,\mu)\Big]^j ds,$$

$$j = 1,\cdots,i-1;$$

$$\alpha_i^i(t,\mu) = 1 + \int_{t_1}^t \mu\big[\widetilde{D}_2(s,\mu)\alpha_i(s,\mu)\big]^i ds; \tag{4.178}$$

$$\alpha_i^j(t,\mu)=\int_{t_1}^{t}\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_s^t(\lambda_j(s,\mu)-\lambda_i(s,\mu))ds\right)\mu\left[\widetilde{D}_2(s,\mu)\alpha_i(s,\mu)\right]^j ds,$$

$$j=i+1,\cdots,M.$$

由于根据对矩阵 $\overline{A}(t)$ 特征值的要求 1°, 上式中的指数函数

$$\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_s^t(\lambda_j(s,\mu)-\lambda_i(s,\mu))ds\right)$$

是有界的, 而 $\|\ \mu\widetilde{D}_2(t,\mu)\ \|\leqslant c\mu$, 因此当 μ 充分小时, 方程组 (4.178) 的积分算子是压缩的, 亦即方程组 (4.178) 存在唯一解; 且不难看出这个解可以写成 $\alpha_i(t,\mu)=e_i+\varepsilon_i(t,\mu)$; 在此及今后, e_i 都是表示它的第 i 个分量为 1 而其余分量为零的向量; 此外, $\varepsilon_i(t,\mu)$ 是表示当 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时满足不等式 $\|\ \varepsilon_i(t,\mu)\ \|\leqslant c\mu$ 的函数.

因为

$$\begin{aligned}T(t,\mu)\alpha_i(t,\mu)&=B(t)[E_M+\mu B_1(t)][e_i+\varepsilon_i(t,\mu)]\\&=B(t)[e_i+\varepsilon_i(t,\mu)]=b_i(t)+\varepsilon_i(t,\mu),\end{aligned}$$

其中 $b_i(t)$ 是矩阵 $B(t)$ 的第 i 列, 所以方程组 (4.167) 在区间 $[t_0, t_1]$ 上的基本解组可以写成

$$u_i(t,\mu)=\left[b_i(t)+\varepsilon_i(t,\mu)\right]\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^t\lambda_i(s,\mu)ds\right),\quad i=1,\cdots,M. \tag{4.179}$$

(b) 利用基本解组 (4.179), 我们来构造方程组 (4.167) 满足条件

$$au(t_0,\mu)=0 \tag{4.180}$$

的解. 为此, 我们求其形如 $u(t,\mu)=\sum\limits_{i=1}^{M}c_iu_i(t,\mu)$ 的解. 由条件 (4.180) 即得

$$a\sum_{i=1}^{M}c_iu_i(t_0,\mu)=a\sum_{i=1}^{M}c_i(b_i(t_0)+\varepsilon_i(t_0,\mu))=0. \tag{4.181}$$

这是 k 个含有 M 个未知数 $c_1,\cdots,c_M$ 的线性方程组. 由于当 $\mu\to0$ 时有 $t_0\to0$, 且 $\|\ \varepsilon_i(t,\mu)\ \|\leqslant c\mu$, 因此当 μ 充分小时, 方程组 (4.181) 中 $c_1,\cdots,c_k$ 的系数矩阵与 $B_{11}(0)$ 的差别就尽可能小; 又根据条件 4° 有 $\det B_{11}(0)\neq0$, 从而任意给定 $c_{k+1},\cdots,c_M$ 之后, 就可以从 (4.181) 确定 $c_1,\cdots,c_k$. 取未知量 $c_{k+1},\cdots,c_M$ 的值为 $c_i=\delta_{ij}$, $i,j=k+1,\cdots,M$, 并对每一个 j 确定其余的未知量 c_i, $i-1,\cdots,k$, 即得方程组 (4.167) 满足条件 (4.180) 的 $(M-k)$ 个线性无关解 $\widetilde{u}_j(t,\mu), j=k+1,\cdots,M$,

而且它们可以写成

$$\begin{aligned}\widetilde{u}_j(t,\mu) &= u_j(t,\mu) + \sum_{i=1}^{k} \overset{(j)}{c}_i\, u_i(t,\mu) \\ &= (b_j(t)+\varepsilon_j(t,\mu))\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}\lambda_j(s,\mu)ds\right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{k} \overset{(j)}{c}_i\,(b_i(t)+\varepsilon_i(t,\mu))\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}\lambda_i(s,\mu)ds\right),\end{aligned}$$

即含有一个正指数的幂和 k 个负指数的幂. 将

$$\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}\lambda_j(s,\mu)ds\right)$$

提到括号之外即得

$$\widetilde{u}_j(t,\mu) = (b_j(t)+\delta_j(t,\mu))\left(\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}\lambda_j(s,\mu)ds\right), \quad j=k+1,\cdots,M,$$

其中 $\delta_j(t,\mu)$ 在点 t_0 附近一般来说已经不再是很小的量, 但是在区间 $t_0<\bar{t}_0\leqslant t\leqslant t_1$ ($\bar{t}_0=\bar{a}_0\mu|\ln\mu|$, $\bar{a}_0>a_0$ 充分大) 上当 $\mu\to 0$ 时对 t 一致地有 $\delta_j(t,\mu)\to 0$.

使用类似的方法可以构造 k 个满足条件

$$bu(t_1,\mu)=0 \tag{4.182}$$

的线性无关解.

我们将所得结果叙述成如下引理 (省略去 u_j 上的记号 $\sim$).

引理 4.7 *当 a_0 和 a_1 充分大, 而 μ 充分小时, 方程组 (4.167) 在 $[t_0,t_1]$ 上存在由 k 个满足条件 (4.182) 的解*

$$u_j(t,\mu)=\gamma_j(t,\mu)\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t}\lambda_j(s,\mu)ds\right), \quad j=1,\cdots,k,$$

以及 $M-k$ 个满足条件 (4.180) 的解

$$u_j(t,\mu)=\gamma_j(t,\mu)\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}\lambda_j(s,\mu)ds\right), \quad j=k+1,\cdots,M$$

组成的基本解组, 其中

$$\gamma_j(t,\mu)=b_j(t)+\delta_j(t,\mu), \quad j=1,\cdots,M;$$

而且向量函数 $\delta_j(t,\mu)$ 当 $\mu\to 0$ 时对 $j=1,\cdots,k$ 在区间 $t_0\leqslant t\leqslant \bar{t}_1$ 上, 而对 $j=k+1,\cdots,M$ 在区间 $\bar{t}_0\leqslant t\leqslant\bar{t}_1$ 上关于 t 一致地满足条件 $\delta_j(t,\mu)\to 0$ ($\bar{t}_0=\bar{a}_0\mu|\ln\mu|,\bar{t}_1=1-\bar{a}_1\mu|\ln\mu|$, 这里 $\bar{a}_0$ 和 $\bar{a}_1$ ($a_0<\bar{a}_0$, $a_1<\bar{a}_1$) 当 $\mu\to 0$ 时为充分大但固定的量).

我们将所构造的方程组 (4.167) 的基本解组写成矩阵的形式:

$$U(t,\mu)=\gamma(t,\mu)\mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t}\lambda_1 ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t}\lambda_k ds},e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}\lambda_{k+1} ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t}\lambda_M ds}\right], \tag{4.183}$$

其中 $\gamma(t,\mu)$ 是其列为 $\gamma_j(t,\mu)$ 的矩阵. 对今后来说不仅 $\det\gamma(t,\mu)\neq 0$ 从而存在 $\gamma^{-1}(t,\mu)$ 是重要的, 而且需要当 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$ 且 μ 充分小 $(0<\mu\leqslant\mu_0)$ 时, $\gamma^{-1}(t,\mu)$ 的一致有界性. 由向量函数 $\delta_j(t,\mu)$ 的性质, 当 $\bar{t}_0\leqslant t\leqslant\bar{t}_1$ 时显然有等式

$$\det\gamma(t,\mu)=\det B(t)+\delta(t,\mu)$$

成立. 其中当 $\mu\to 0$ 时关于 t 一致地有 $\delta(t,\mu)\to 0$. 由此可得, 当 $\bar{t}_0\leqslant t\leqslant\bar{t}_1$ 且 μ 充分小时有

$$|\det\gamma(t,\mu)|\geqslant c>0.$$

我们考虑区间 $[t_0,\bar{t}_0]$. 在点 t_0 处当 $\mu\to 0$ 时, $\gamma(t_0,\mu)$ 的极限矩阵为

$$\lim_{\mu\to 0}\gamma(t_0,\mu)=\gamma_0\equiv\begin{bmatrix}B_{11}(0) & 0\\ B_{21}(0) & B_{22}(0)+B_{21}(0)\overline{C}\end{bmatrix}, \tag{4.184}$$

其中 $\overline{C}=(\overline{\overset{(j)}{c_i}})$ 为 $k\times(M-k)$ 阶矩阵 $(i=1,\cdots,k;\ j=k+1,\cdots,M)$, 其元素就是由方程组 (4.181) 确定的量 $\overset{(j)}{c_i}$ $(i=1,\cdots,k;\ j=k+1,\cdots,M)$ 当 $\mu\to 0$ 时的极限值 $\overline{\overset{(j)}{c_i}}$.

练习 验证等式 (4.184).

由于 $B_{12}(0)+B_{11}(0)\overline{C}=0$ $\left(\overset{(j)}{c_i}\text{ 正是这样选取的}\right)$, 所以有

$$\begin{aligned}\det\gamma_0&=\det\begin{bmatrix}B_{11}(0) & 0\\ B_{21}(0) & B_{22}(0)+B_{21}(0)\overline{C}\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}B_{11}(0) & -B_{11}(0)\overline{C}\\ B_{21}(0) & B_{22}(0)\end{bmatrix}\\&=\det\begin{bmatrix}B_{11}(0) & B_{12}(0)\\ B_{21}(0) & B_{22}(0)\end{bmatrix}=\det B(0)\neq 0.\end{aligned}$$

由于当 $\mu\to 0$ 时, $\bar{t}_0=\bar{a}_0\mu|\ln\mu|\to 0$, 因而由此得出, 当 $t\in[t_0,\bar{t}_0]$ 且 μ 充分小时有 $|\det\gamma(t,\mu)|=|\det B(0)|+\delta(t,\mu)\geqslant c>0$. 类似地可以证明当 $\bar{t}_1\leqslant t\leqslant t_1$, $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时有 $|\det\gamma(t,\mu)|\geqslant c>0$. 从而证明了 $\gamma^{-1}(t,\mu)$ 在 $t_0\leqslant t\leqslant t_1$, $0<\mu\leqslant\mu_0$ 上的一致有界性.

(c) 我们现在来构造方程组 (4.167) 的解 $u_0(t,\mu)$, 它应满足边界条件

$$au_0(t_0,\mu)=au^0,\quad bu_0(t_1,\mu)=bu^0,$$

或者完全一样地写成

$$au_0(t_0,\mu)+bu_0(t_1,\mu)=(a+b)u^0=u^0, \tag{4.185}$$

其中 u^0 为给定的常向量.

我们将找出形如 $u_0(t,\mu)=U(t,\mu)c$ 的解 $u_0(t,\mu)$, 这里 $U(t,\mu)$ 是由 (4.183) 定义的基本解矩阵, c 为未知的常向量. 于是由条件 (4.185) 即得

$$[aU(t_0,\mu)+bU(t_1,\mu)]c=u^0.$$

我们证明 c 的系数矩阵的逆 $[aU(t_0,\mu)+bU(t_1,\mu)]^{-1}$ 存在, 从而

$$c=[aU(t_0,\mu)+bU(t_1,\mu)]^{-1}u^0,$$

亦即

$$u_0(t,\mu)=U(t,\mu)[aU(t_0,\mu)+bU(t_1,\mu)]^{-1}u^0. \tag{4.186}$$

考虑到 $\gamma_j(t,\mu)$ 对 $j=1,\cdots,k$ 满足条件 (4.182), 而对 $j=k+1,\cdots,M$ 满足条件 (4.180), 我们有

$$U(t_0,\mu)=\begin{bmatrix}\gamma_{11}(t_0,\mu)\mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t_0}\lambda_1 ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t_0}\lambda_k ds}\right] & 0\\ \gamma_{21}(t_0,\mu)\mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t_0}\lambda_1 ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t_0}\lambda_k ds}\right] & \gamma_{22}(t_0,\mu)\end{bmatrix},$$

$$aU(t_0,\mu)=\begin{bmatrix}\gamma_{11}(t_0,\mu)\mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t_0}\lambda_1 ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t_0}\lambda_k ds}\right] & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

类似可得

$$bU(t_1,\mu)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \gamma_{22}(t_1,\mu)\mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t_1}\lambda_{k+1} ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t_1}\lambda_M ds}\right]\end{bmatrix}. \tag{4.187}$$

于是即得

$$aU(t_0,\mu)+bU(t_1,\mu)=\begin{bmatrix}\gamma_{11}(t_0,\mu)\mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t_0}\lambda_1 ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t_0}\lambda_k ds}\right] & 0\\ 0 & \gamma_{22}(t_1,\mu)\mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t_1}\lambda_{k+1} ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t_1}\lambda_M ds}\right]\end{bmatrix}.$$

由于当 $\mu\to 0$ 时有 $\gamma_{11}(t_0,\mu)\to B_{11}(0)$, $\gamma_{22}(t_1,\mu)\to B_{22}(1)$, 因此根据条件 4°, 当 μ 充分小时, $\gamma_{11}^{-1}(t_0,\mu)$ 和 $\gamma_{22}^{-1}(t_1,\mu$ 存在且有界. 按照公式 (4.55), 并考虑到在目前情况下有 $A_{12}=A_{21}=0$, 亦即 $H=A_{22}$, 从而即得

$$[aU(t_0,\mu)+bU(t_1,\mu)]^{-1}=\begin{bmatrix}\mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t_1}\lambda_1 ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t_1}\lambda_k ds}\right]\gamma_{11}^{-1}(t_0,\mu) & 0\\ 0 & \mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t_0}\lambda_{k+1} ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t_0}\lambda_M ds}\right]\gamma_{22}^{-1}(t_1,\mu)\end{bmatrix}. \tag{4.188}$$

利用 (4.183) 和 (4.188), 我们从 (4.187) 最后得到

$$u_0(t,\mu)=\gamma(t,\mu)\begin{bmatrix}\mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^t\lambda_1 ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^t\lambda_k ds}\right]\gamma_{11}^{-1}(t_0,\mu) & 0\\ 0 & \mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^t\lambda_{k+1} ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^t\lambda_M ds}\right]\gamma_{22}^{-1}(t_1,\mu)\end{bmatrix}u^0. \tag{4.189}$$

由此即见, 若 $u^0=0$, 则 $u_0(t,\mu)\equiv 0$, 亦即方程组 (4.167) 在齐次边界条件 (4.180), (4.182) 之下只有零解, 从而问题 (4.167), (4.185) 存在唯一解. 我们将所得结果写成如下引理:

引理 4.8 当 a_0 和 a_1 充分大、而 μ 充分小时, 边值问题 (4.167), (4.185) 的解存在、唯一, 且可写成 (4.189) 的形式.

(d) 我们现在转到构造边值问题 (4.165), (4.180), (4.182) 的矩阵 Green 函数 $G(t,s,\mu)$ 问题. 从刚刚指出的关于齐次问题 (4.167), (4.180), (4.182) 只有零解即知 $G(t,s,\mu)$ 存在唯一.

我们寻找形如

$$G(t,s,\mu)=\begin{cases}U(t,\mu)V(s,\mu), & \text{当 } t_0\leqslant t\leqslant s\leqslant t_1,\\ U(t,\mu)W(s,\mu), & \text{当 } t_0\leqslant s\leqslant t\leqslant t_1,\end{cases}$$

的矩阵 Green 函数 $G(t,s,\mu)$ (参看 [46]). 根据 $G(t,s,\mu)$ 的定义, $V(s,\mu)$ 和 $W(s,\mu)$ 应满足条件

$$\begin{cases}aU(t_0,\mu)V(s,\mu)+bU(t_1,\mu)W(s,\mu)=0,\\ U(s,\mu)W(s,\mu)-U(s,\mu)V(s,\mu)=E_M.\end{cases} \tag{4.190}$$

由此即得

$$V(s,\mu)=-[aU(t_0,\mu)+bU(t_1,\mu)]^{-1}bU(t_1,\mu)U^{-1}(s,\mu).$$

由于

$$U^{-1}(s,\mu)=\mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_s^{t_1}\lambda_1 ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_s^{t_1}\lambda_k ds},e^{\frac{1}{\mu}\int_s^{t_0}\lambda_{k+1} ds},\cdots\right.$$
$$\left.\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_s^{t_0}\lambda_M ds}\right]\gamma^{-1}(s,\mu),$$

并考虑到 (4.187), (4.188) 式, 因此即得

$$V(s,\mu)=-\begin{bmatrix}\mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t_1}\lambda_1 ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t_1}\lambda_k ds}\right]\gamma_{11}^{-1}(t_0,\mu) & 0\\ 0 & \mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t_0}\lambda_{k+1} ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{t_0}\lambda_M ds}\right]\gamma_{22}^{-1}(t_1,\mu)\end{bmatrix}$$
$$\times\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \gamma_{22}(t_1,\mu)\mathrm{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t_1}\lambda_{k+1} ds},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\int_{t_0}^{t_1}\lambda_M ds}\right]\end{bmatrix}$$

$$\times \text{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_s^{t_1}\lambda_1 ds}, \cdots, e^{\frac{1}{\mu}\int_s^{t_1}\lambda_k ds}, e^{\frac{1}{\mu}\int_s^{t_0}\lambda_{k+1} ds}, \cdots\right.$$
$$\left.\cdots, e^{\frac{1}{\mu}\int_s^{t_0}\lambda_M ds}\right]\gamma^{-1}(s,\mu)$$
$$= -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_s^{t_0}\lambda_{k+1} ds}, \cdots, e^{\frac{1}{\mu}\int_s^{t_0}\lambda_M ds}\right]\end{bmatrix}\gamma^{-1}(s,\mu).$$

由于当 $t_0 \leqslant t \leqslant s \leqslant t_1$ 时结果有

$$G(t,s,\mu) = U(t,\mu)V(s,\mu) = \gamma(t,\mu)$$
$$\times \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{diag}\left[e^{\frac{1}{\mu}\int_s^{t}\lambda_{k+1} ds}, \cdots, e^{\frac{1}{\mu}\int_s^{t}\lambda_M ds}\right]\end{bmatrix}\gamma^{-1}(s,\mu)$$

由此及 $\gamma(t,\mu)$ 和 $\gamma^{-1}(s,\mu)$ 的一致有界性直接的出, 当 $t_0 \leqslant t \leqslant s \leqslant t_1$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时有不等式

$$\| G(t,s,\mu) \| \leqslant c\exp\left(-\frac{\kappa(s-t)}{\mu}\right) = c\exp\left(-\frac{\kappa|s-t|}{\mu}\right)$$

成立. 可以得到 $G(t,s,\mu)$ 在 $t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_1$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 上的类似估计 (从 (4.190) 对 $W(s,\mu)$ 的表达式) . 从而证明了如下引理:

引理 4.9 当 a_0, a_1 充分大和 μ 充分小时, 边值问题 (4.165), (4.180), (4.182) 的矩阵 Green 函数 $G(t,s,\mu)$ 存在、唯一且满足不等式

$$\| G(t,s,\mu) \| \leqslant c\exp\left(-\frac{\kappa|s-t|}{\mu}\right), \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad t_0 \leqslant s \leqslant t_1. \tag{4.191}$$

(4) 区间 $[0, t_0]$.

(a) 我们首先考虑辅助方程组 (4.170). 类似于在区间 $[t_0, t_1]$ 上对 (4.167) 所做那样, 可以在半直线 $0 < b_0 \leqslant \tau_0 < \infty$ (这里 b_0 充分大) 上利用 [50] 中的方法对方程组 (4.170) 构造形为

$$u_i(\tau_0) = B(0)\alpha_i(\tau_0)\exp(\overline{\lambda}_i(0)\tau_0), \quad i = 1, \cdots, M, \tag{4.192}$$

的基本解组, 其中 $\alpha_i(\tau_0)$ 由方程

$$\frac{d\alpha_i}{d\tau_0} = \left(\Lambda(0) - \overline{\lambda}_i(0)E_M\right)\alpha_i + D(\tau_0)\alpha_i \tag{4.193}$$

及条件

$$\begin{cases} \alpha_i^j(b_0) = 0, & \text{当 } \mathrm{Re}\overline{\lambda}_i(0) > \mathrm{Re}\overline{\lambda}_j(0), \\ \alpha_i^i(\infty) = 1, \\ \alpha_i^j(\infty) = 0, & \text{当 } \mathrm{Re}\overline{\lambda}_i(0) \leqslant \mathrm{Re}\overline{\lambda}_j(0), \quad i \neq j, \end{cases} \tag{4.194}$$

决定, 其中

$$D(\tau_0) = B^{-1}(0)\Delta_0(\tau_0)B(0), \tag{4.195}$$

而且量 b_0 选得这样大, 使得在关于 $\alpha_i(\tau_0)$ 的等价积分方程组中的积分算子成为一个压缩算子, 这样选取 b_0 是完全可能的, 因为由 (4.169), 当 $\tau_0 \geqslant b_0$ 时有 $\| D(\tau_0) \| \leqslant c\exp(-\kappa b_0)$.

向量函数 $\alpha_i(\tau_0)$ 可以表示成

$$\alpha_i(\tau_0) = e_i + \varepsilon_i(\tau_0), \tag{4.196}$$

其中有 $\| \varepsilon_i(\tau_0) \| \leqslant c\exp(-\kappa\tau_0)$ (关于常数 κ 和 c 参看 §10 中第 3 段的注 1 和注 2).

从 b_0 到 0 运用连续的方法延拓方程 (4.193) 的解 $\alpha_i(\tau_0)$, $i = 1, \cdots, M$, 即得 (4.170) 在 $[0, \infty)$ 上且形式为 (4.192) 的基本解组, 此外对 $\alpha_i(\tau_0)$ 的表达式 (4.196) 也是正确的.

我们用 $\alpha(\tau_0)$ 表示其列为 $\alpha_i(\tau_0)$ 的矩阵, 并建立一个对今后来说是重要的不等式:

$$\det(B(0)\alpha(0))_{11} \neq 0. \tag{4.197}$$

假设这个不等式不成立, 并考虑 (4.170) 的解

$$u(\tau_0) = \sum_{i=1}^{k} c_i u_i(\tau_0) = \sum_{i=1}^{k} c_i B(0)\alpha_i(\tau_0)\exp(\overline{\lambda}_i(0)\tau_0);$$

显然这个解当 $\tau_0 \to \infty$ 时趋于零. 可以选取 c_i (不全为零) 使得 $u(\tau_0)$ 满足条件

$$au(\tau_0) = 0.$$

事实上, 由此条件可得 c_i, $i = 1, \cdots, k$, 的线性方程组

$$a\sum_{i=1}^{k} c_i B(0)\alpha_i(0) = 0,$$

其系数行列式为 $\det(B(0)\alpha(0))_{11}$, 于是若 $\det(B(0)\alpha(0))_{11} = 0$, 则这个方程组存在非平凡解 c_i, 从而推出方程组 (4.170) 在满足条件 (4.171) 之下有非零解 $u(\tau_0)$, 这与要求 3° 矛盾, 因此不等式 (4.197) 成立.

(b) 我们现在转到方程组 (4.167) 在区间 $[0, t_0]$ 上的问题. 做自变量的变量替换 $t = \tau_0\mu$, 于是 (4.167) 可以写成

$$\frac{du}{d\tau_0} = [\overline{A}(0) + \Delta_0(\tau_0)]u + H(\tau_0, \mu)u, \quad 0 \leqslant \tau_0 \leqslant \overline{\tau}_0 = a_0|\ln\mu|, \tag{4.198}$$

其中 $H(\tau_0, \mu) = \overline{A}(\tau_0, \mu) - \overline{A}(0) + \Delta_1$. 显然, 当 $\mu \to 0$ 时有 $\| H(\tau_0, \mu) \to 0$ 关于 $\tau_0 \in [0, \overline{\tau}_0]$ 一致地成立. **今后, 为了简单起见, 无论是矩阵、向量, 还是数值函数, 只**

要当 $\mu \to 0$ 时关于 $\tau_0 \in [0, \overline{\tau}_0]$ 一致地趋向于零, 我们都用同一个记号 $\omega(\tau_0, \mu)$ 来表示它们. 因此, $H(\tau_0, \mu) = \omega(\tau_0, \mu)$; 从而函数的变量替换 $u = B(0)\eta$ 将 (4.198) 变成

$$\frac{d\eta}{d\tau_0} = \Lambda(0)\eta + D(\tau_0)\eta + \omega(\tau_0, \mu)\eta, \tag{4.199}$$

这里 $\Lambda(0)$ 由公式 (4.172) 决定, 而 $D(\tau_0)$ 是由公式 (4.195) 所定义.

我们在 $0 < b_0 \leqslant \tau_0 \leqslant \overline{\tau}_0$ 上来构造 (4.199) 的形式如

$$\eta_i(\tau_0, \mu) = \beta_i(\tau_0, \mu) \exp(\overline{\lambda}_i(0)\tau_0), \quad i = 1, \cdots, M, \tag{4.200}$$

的基本解组. 将 (4.200) 代入 (4.199) 即得 $\beta_i(\tau_0, \mu)$ 的方程

$$\frac{d\beta_i}{d\tau_0} = (\Lambda(0) - \overline{\lambda}_i(0)E_M)\beta_i + D(\tau_0)\beta_i + \omega(\tau_0, \mu)\beta_i, \tag{4.201}$$

这是方程 (4.193) 的正则摄动方程. 关于 $\beta_i(\tau_0, \mu)$ 我们给定边界条件

$$\begin{cases} \beta_i^j(b_0) = \alpha_i^j(b_0) = 0, & \text{当} \operatorname{Re} \overline{\lambda}_i(0) > \operatorname{Re} \overline{\lambda}_j(0), \\ \beta_i^j(\overline{\tau}_0) = \alpha_i^j(\overline{\tau}_0), & \text{当} \operatorname{Re} \overline{\lambda}_i(0) \leqslant \operatorname{Re} \overline{\lambda}_j(0), \end{cases} \tag{4.202}$$

其中 $\alpha_i(\tau_0)$ 是边值问题 (4.193) (4.194) 的解.

当 $b_0 \leqslant \tau_0 \leqslant \overline{\tau}_0$ 时, 将边值问题 (4.201), (4.202) 的解 $\beta_i(\tau_0, \mu)$ 与前面边值问题 (4.193), (4.194) 的解 $\alpha_i(\tau_0)$ 进行比较 (不难写出关于差 $\beta_i(\tau_0, \mu) - \alpha_i(\tau_0)$ 的具有压缩算子和小右端的线性积分方程), 即知当 b_0 充分大且 μ 充分小时, 问题 (4.201), (4.202) 的解存在、唯一且可写成

$$\beta_i(\tau_0, \mu) = \alpha_i(\tau_0) + \omega(\tau_0, \mu), \quad b_0 \leqslant \tau_0 \leqslant \overline{\tau}_0, \quad i = 1, \cdots, M. \tag{4.203}$$

将所构造的方程 (4.201) 的解 $\beta_i(\tau_0, \mu)$ 从 b_0 到 0 进行连续地延拓, 显然这个解仍然保持 (4.203) 的形式, 因此方程组 (4.198) (或者对变量 t 来说, 即方程组 (4.167)) 在 $[0, \overline{\tau}_0]$ 上具有形式如

$$u_i(\tau_0, \mu) = B(0)\beta_i(\tau_0, \mu) \exp(\overline{\lambda}_i(0)\tau_0), \quad i = 1, \cdots, M, \tag{4.204}$$

的基本解组, 而且对解 $\beta_i(\tau_0, \mu)$ 来说, 表达式 (4.203) 是正确的, 其中当 $\mu \to 0$ 时有 $\omega(\tau_0, \mu) \to 0$ 对 $\tau_0 \in [0, \overline{\tau}_0]$ 一致地成立.

记 $\beta(\tau_0, \mu)$ 为其列是 $\beta_i(\tau_0, \mu)$ 的矩阵, 于是由 (4.203) 即得

$$\det(B(0)\beta(0, \mu))_{11} = \det(B(0)\alpha(0))_{11} + \omega(\mu).$$

其中无论是现在还是以后, 我们总是以 $\omega(\mu)$ 表示当 $\mu \to 0$ 时而趋于零的任一个依赖于 μ 的量, 于是根据 (4.197) 即知, 当 μ 充分小时有

$$\det(B(0)\beta(0, \mu))_{11} \neq 0. \tag{4.205}$$

(c) 利用基本解组 (4.204) 和不等式 (4.205), 与在 (3) (b) 段中一样, 可以构造方程组 (4.198) 满足条件

$$au(0,\mu)=0 \tag{4.206}$$

的 $(M-k)$ 个线性无关解 $\widetilde{u}_j(\tau_0,\mu)$, $j=k+1,\cdots,M$; 而且可将它写成

$$\widetilde{u}_j(\tau_0,\mu)=\gamma_j(\tau_0,\mu)\exp(\overline{\lambda}_j(0)\tau_0),\quad j=k+1,\cdots,M, \tag{4.207}$$

其中

$$\gamma_j(\tau_0,\mu)=B(0)(e_j+\varepsilon_j(\tau_0)+\omega(\tau_0,\mu)). \tag{4.208}$$

不过这里的 $\varepsilon_j(\tau_0)$ 与 (4.196) 中的并不是同一个函数, 但却像在 (4.196) 那样也满足不等式 $\|\varepsilon_j(\tau_0)\|\leqslant c\exp(-\kappa\tau_0)$, 因此在此利用同样的记号.

完全一样地可以构造 (4.198) 满足条件

$$bu(\overline{\tau}_0,\mu)=0 \tag{4.209}$$

的 k 个线性无关解. 这种构造的实质在于

$$\beta_i(\overline{\tau}_0,\mu)=\alpha_i(\overline{\tau}_0)+\omega(\overline{\tau}_0,\mu)=e_i+\varepsilon_i(\overline{\tau}_0)+\omega(\overline{\tau}_0,\mu)=e_i+\omega(\mu),$$

亦即

$$\det(B(0)\beta(\overline{\tau}_0,\mu))_{22}=\det B_{22}(0)+\omega(\mu),$$

由此及条件 4° 即知当 μ 充分小时有

$$\det(B(0)\beta(\overline{\tau}_0,\mu))_{22}\neq 0.$$

这 k 个解可以写成

$$\widetilde{u}_j(\tau_0,\mu)=\gamma_j(\tau_0,\mu)\exp(\overline{\lambda}_j(0)(\tau_0-\overline{\tau}_0)),\quad j=1,\cdots,k, \tag{4.210}$$

其中

$$\gamma_j(\tau_0,\mu)=B(0)(e_j+\varepsilon_j(\tau_0)+\delta_j(\tau_0)+\omega(\tau_0,\mu), \tag{4.211}$$

而且 $\varepsilon_j(\tau_0)$ 是具有在 (4.196) 中同样性质的函数, $\|\delta_j(\tau_0)\|\leqslant c\exp(\kappa(\tau_0-\overline{\tau}_0))$.

我们将这一结果写成如下引理:

引理 4.10 *当 μ 充分小时, 方程组 (4.198) (从而与它等价的 (4.167)) 在区间 $[0,\overline{\tau}_0]$ 上有形如 (4.207), (4.210) 的基本解组; 此外, 解 (4.207) 还满足条件(4.206), 而解 (4.210) 满足条件 (4.209).*

我们把上面所构造的基本解组写成如下矩阵形式:

$$U(\tau_0,\mu)=\gamma(\tau_0,\mu)\mathrm{diag}\Big(e^{\overline{\lambda}_1(0)(\tau_0-\overline{\tau}_0)},\ \cdots,\ e^{\overline{\lambda}_k(0)(\tau_0-\overline{\tau}_0)},\\ e^{\overline{\lambda}_{k+1}(0)\tau_0},\cdots,e^{\overline{\lambda}_M(0)\tau_0}\Big), \tag{4.212}$$

其中 $\gamma(\tau_0,\mu)$ 是其列为 $\gamma_i(\tau_0,\mu)$ 的矩阵.

建立 $\gamma^{-1}(\tau_0,\mu)$ 在 $0\leqslant\tau_0\leqslant\overline{\tau}_0,\ 0<\mu\leqslant\mu_0$ 上的一致有界性对今后的讨论是非常重要的, 为此我们将区间 $[0,\overline{\tau}_0]$ 分成三个部分: $[0,\overline{b}_0],\ [\overline{b}_0,\overline{\tau}_0-\overline{b}_0],\ [\overline{\tau}_0-\overline{b}_0,\overline{\tau}_0]$. 在中间区间 $[\overline{b}_0,\overline{\tau}_0-\overline{b}_0]$ 上利用 (4.208) 和 (4.211) 即得

$$\det\gamma(\tau_0,\mu)=\det B(0)+O(\exp(-\kappa\overline{b}_0))+\omega(\tau_0,\mu).$$

由此推出, 当 $\overline{b}_0$ 充分大 (但当 $\mu\to 0$ 时是固定的) 且 μ 充分小时有

$$|\det\gamma(\tau_0,\mu)|\geqslant c>0,\quad 当\ \overline{b}_0\leqslant\tau_0\leqslant\overline{\tau}_0-\overline{b}_0.$$

为了在 $0\leqslant\tau_0\leqslant\overline{b}_0$ 上证明这样的不等式, 我们利用等式

$$\det U(\tau_0,\mu)=\det\gamma(\tau_0,\mu)\exp\Big((\overline{\lambda}_1(0)+\cdots+\overline{\lambda}_k(0))(\tau_0-\overline{\tau}_0)\\ +(\overline{\lambda}_{k+1}(0)+\cdots+\overline{\lambda}_M(0))\tau_0\Big),$$

由此即得

$$\frac{\det\gamma(\tau_0,\mu)}{\det\gamma(\overline{b}_0,\mu)}=\frac{\det U(\tau_0,\mu)}{\det U(\overline{b}_0,\mu)}\exp\Big((\overline{\lambda}_1(0)+\cdots+\overline{\lambda}_M(0))(\overline{b}_0-\tau_0)\Big), \tag{4.213}$$

而由 Liouville 公式有

$$\frac{\det U(\tau_0,\mu)}{\det U(\overline{b}_0,\mu)}=\exp\Big(\int_{\overline{b}_0}^{\tau_0}\sum_{i-1}^{M}(\overline{A}+\Delta_0+\Delta_1)_{ii}d\tau\Big).$$

当 $0\leqslant\tau_0\leqslant\overline{b}_0$ 时, 上式及 (4.213) 中的幂指数都是一致有界, 且以某些正常数为其上界和下界, 因此由 (4.213) 即得

$$|\det\gamma(\tau_0,\mu)|\geqslant c>0,\quad 当\ 0\leqslant\tau_0\leqslant\overline{b}_0.$$

可以在 $\overline{\tau}_0-\overline{b}_0\leqslant\tau_0\leqslant\overline{\tau}_0$ 进行类似论证, 因此

$$|\det\gamma(\tau_0,\mu)|\geqslant c>0,\quad 当\ 0\leqslant\tau_0\leqslant\overline{\tau}_0,\ 0<\mu\leqslant\mu_0,$$

亦即 $\gamma^{-1}(\tau_0,\mu)$ 对 $0\leqslant\tau_0\leqslant\overline{\tau}_0,\ 0<\mu\leqslant\mu_0$ 一致有界.

(d) 利用基本解组 (4.212), 并像在 (3)(c) 和 (3)(d) 段中那样进行论证, 不难证明类似于引理4.8和引理4.9的如下两条引理 (在叙述这两条引理时, 我们回到原来的变量 t, 并且为了区别 $\gamma(\tau_0,\mu)$ 和 $\gamma(t,\mu)$ (参看 (4.183)), 我们用 $\overset{(0)}{\gamma}(t,\mu)$ 表示 $\gamma(\tau_0,\mu)$.

引理 4.11 当 μ 充分小时, 方程组 (4.167) 存在唯一满足边界条件

$$a\overset{(0)}{u}_0(0,\mu)+b\overset{(0)}{u}_0(t_0,\mu)=\overset{(0)}{u}{}^0$$

的解 $\overset{(0)}{u}_0(t,\mu)$, 而且它可以写成

$$\begin{aligned}\overset{(0)}{u}_0(t,\mu)=&\overset{(0)}{\gamma}(t,\mu)\\&\times\begin{bmatrix}\operatorname{diag}(e_1,\cdots,e_k)\,\overset{(0)}{\gamma}{}_{11}^{-1}(0,\mu) & 0\\ 0 & \operatorname{diag}(e_{k+1},\cdots,e_M)\,\overset{(0)}{\gamma}{}_{22}^{-1}(t_0,\mu)\end{bmatrix}\overset{(0)}{u}{}^0,\end{aligned}\tag{4.214}$$

其中

$$e_i=\exp\left(\frac{1}{\mu}\overline{\lambda}_i(0)t\right),\quad 当\ i=1,\cdots,k,$$

$$e_i=\exp\left(\frac{1}{\mu}\overline{\lambda}_i(0)(t-t_0)\right),\quad 当\ i=k+1,\cdots,M.$$

出现在 (4.214) 中的量 $\overset{(0)}{\gamma}{}_{11}^{-1}(0,\mu)$ 当 $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时的存在性和一致有界性是从 $\det\overset{(0)}{\gamma}(0,\mu)=\det\overset{(0)}{\gamma}{}_{11}(0,\mu)\det\overset{(0)}{\gamma}{}_{22}(0,\mu)$, 从而 $|\det\overset{(0)}{\gamma}{}_{11}(0,\mu)|\geqslant c>0$ 推出的. 类似地可以证明, 当 $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时, $\overset{(0)}{\gamma}{}_{22}^{-1}(t_0,\mu)$ 的一致有界性.

引理 4.12 当 μ 充分小时, 方程组 (4.165) 在边界条件

$$au(0,\mu)=0,\quad bu(t_0,\mu)=0\tag{4.215}$$

之下的矩阵 Green 函数 $G(t,s,\mu)$ 存在、唯一且满足不等式

$$\left\|\overset{(0)}{G}(t,s,\mu)\right\|\leqslant c\exp\left(-\frac{\kappa|t-s|}{\mu}\right),\quad 0\leqslant t\leqslant t_0,\quad 0\leqslant s\leqslant t_0.\tag{4.216}$$

(5) 区间 $[t_1,1]$.

在这个区间上进行像第 (4) 段中那样的构造之后, 不难证明类似于引理 4.10 ~ 4.12 的引理. 我们给出如下两条类似的引理:

引理 4.13 当 μ 充分小时, 方程组 (4.167) 存在唯一满足边界条件

$$a\overset{(1)}{u}_0(t_1,\mu)+b\overset{(1)}{u}_0(1,\mu)=\overset{(1)}{u}{}^0$$

的解 $\overset{(1)}{u}_0(t,\mu)$, 而且它可以写成

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{u}_0(t,\mu)=&\overset{(1)}{\gamma}(t,\mu)\\&\times\begin{bmatrix}\operatorname{diag}(g_1,\cdots,g_k)\,\overset{(1)}{\gamma}{}_{11}^{-1}(t_1,\mu) & 0\\ 0 & \operatorname{diag}(g_{k+1},\cdots,g_M)\,\overset{(1)}{\gamma}{}_{22}^{-1}(1,\mu)\end{bmatrix}\overset{(1)}{u}{}^0,\end{aligned}\tag{4.217}$$

其中

$$g_i = \exp\left(\frac{1}{\mu}\overline{\lambda}_i(1)(t-t_1)\right), \quad 当\ i=1,\cdots,k,$$

$$g_i = \exp\left(\frac{1}{\mu}\overline{\lambda}_i(1)(t-1)\right), \quad 当\ i=k+1,\cdots,M.$$

而矩阵 $\overset{(1)}{\gamma}(t,\mu)$ 是类似于在公式 (4.124) 中的矩阵 $\overset{(0)}{\gamma}(t,\mu)$.

引理 4.14 当 μ 充分小时, 方程组 (4.165) 在边界条件

$$au(t_1,\mu)=0, \quad bu(1,\mu)=0 \tag{4.218}$$

之下的矩阵 Green 函数 $G(t,s,\mu)$ 存在、唯一且满足不等式

$$\left\|\overset{(1)}{G}(t,s,\mu)\right\| \leqslant c\exp\left(-\frac{\kappa|t-s|}{\mu}\right), \quad t_1\leqslant t\leqslant 1, \quad t_1\leqslant s\leqslant 1.$$

(6) 我们现在构造方程组 (4.165) 满足边界条件

$$au(0,\mu)+bu(1,\mu)=u^0 \tag{4.219}$$

的解 $u(t,\mu)$. 为此, 我们利用上面在三个区间的每一个上所构造的方程组 (4.167) 在 (4.219) 类型的非齐次的边界条件下的解, 以及对应边值问题的 Green 函数.

在区间 $[0,\ t_0]$ 上有

$$u(t,\mu)=\overset{(0)}{u}_0(t,\mu)+\int_0^{t_0}\frac{1}{\mu}\overset{(0)}{G}(t,s,\mu)f(s,\mu)ds, \tag{4.220}$$

式中 $\overset{(0)}{u}_0(t,\mu)$ 是由 (4.124) 式所决定, 这时需要令 $\overset{(0)}{u}{}^0=\begin{pmatrix}u_1^0\\u_2(t_0,\mu)\end{pmatrix}$, 在此 u_1^0 是向量 u^0 的第一块, $u_2(t_0,\mu)$ 是所求向量函数 $u(t,\mu)$ 的第二块在点 t_0 处的值, 而 $\overset{(0)}{G}(t,s,\mu)$ 为边值问题 (4.165), (4.215) 的矩阵 Green 函数.

在区间 $[t_0,\ t_1]$ 上有类似的公式:

$$u(t,\mu)=u_0(t,\mu)+\int_{t_0}^{t_1}\frac{1}{\mu}G(t,s,\mu)f(s,\mu)ds, \tag{4.221}$$

式中 $u_0(t,\mu)$ 是由 (4.189) 式所决定, 这时需要令 $u^0=\begin{pmatrix}u_1(t_0,\mu)\\u_2(t_1,\mu)\end{pmatrix}$, 在此 $u_1(t_0,\mu)$ 和 $u_2(t_1,\mu)$ 为所求向量函数 $u(t,\mu)$ 的第一块和第二块分别在点 t_0 和点 t_1 的值, 而 $G(t,s,\mu)$ 为边值问题 (4.165), (4.180), (4.182) 的矩阵 Green 函数.

最后, 在区间 $[t_1,\ 1]$ 上我们有

$$u(t,\mu)=\overset{(1)}{u}_0(t,\mu)+\int_{t_0}^{1}\frac{1}{\mu}\overset{(1)}{G}(t,s,\mu)f(s,\mu)ds, \tag{4.222}$$

式中 $\overset{(1)}{u}_0(t,\mu)$ 是由 (4.217) 式所决定, 这时需要令 $\overset{(1)}{u}{}^0=\begin{pmatrix}u_1(t_1,\mu)\\u_2^0\end{pmatrix}$, 在此, $u_1(t_1,\mu)$ 是所求向量函数 $u(t,\mu)$ 的第一块在点 t_1 处的值, u_2^0 是已知向量 u^0 的第二块; 而 $\overset{(1)}{G}(t,s,\mu)$ 为边值问题 (4.165), (4.218) 的矩阵 Green 函数.

由 (4.220), (4.221), (4.222) 式还无法决定所要求的解 $u(t,\mu)$, 这是因为这三式右端的第一项 (即项 $\overset{(0)}{u}_0(t,\mu)$, $u_0(t,\mu)$, $\overset{(1)}{u}_0(t,\mu)$) 含有所求解本身在点 t_0 和 t_1 处的值. 我们准备用 (4.220) ~ (4.222) 式本身来求出这些值.

在 (4.220) 和 (4.214) 中令 $t=t_0$, 则可得第一块 $u_1(t_0,\mu)$ 的如下表达式

$$\begin{aligned}u_1(t_0,\mu)=&\overset{(0)}{\gamma}_{11}(t_0,\mu)\mathrm{diag}\left(e^{\frac{1}{\mu}\overline{\lambda}_1(0)t_0},\cdots,e^{\frac{1}{\mu}\overline{\lambda}_k(0)t_0}\right)\overset{(0)}{\gamma}{}_{11}^{-1}(0,\mu)u_1^0\\&+\overset{(0)}{\gamma}_{12}(t_0,\mu)\overset{(0)}{\gamma}{}_{22}^{-1}(t_0,\mu)u_2(t_0,\mu)+\left(\int_0^{t_0}\frac{1}{\mu}\overset{(0)}{G}(t_0,s,\mu)f(s,\mu)ds\right)_1.\end{aligned}\tag{4.223}$$

我们把右端的第一项与第三项的和记作 $h_1(\mu)$, 并注意到这时有

$$e^{\frac{1}{\mu}\overline{\lambda}_i(0)t_0}=e^{\overline{\lambda}_i(0)a_0|\ln\mu|}=\mu^{a_0|\mathrm{Re}\overline{\lambda}_i(0)|}=\omega(\mu),\quad i=1,\cdots,k,$$

(我们记得: $\omega(\mu)$ 是表示任一个只依赖于 μ 且当 $\mu\to0$ 时有 $\|\omega(\mu)\|\to0$ 的 μ 的任何矩阵、向量或数量) .

其次我们注意到由 (4.208) 式可得等式

$$\overset{(0)}{\gamma}_{12}(t_0,\mu)\overset{(0)}{\gamma}{}_{22}^{-1}(t_0,\mu)=B_{12}(0)B_{22}^{-1}(0)+\omega(\mu).$$

因此 (4.223) 可以写成

$$u_1(t_0,\mu)=[B_{12}(0)B_{22}^{-1}(0)+\omega(\mu)]u_2(t_0,\mu)+h_1(\mu).\tag{4.224}$$

用类似的方法从 (4.221) 可得: 当 $t=t_0$ 时有

$$u_2(t_0,\mu)=[B_{21}(0)B_{11}^{-1}(0)+\omega(\mu)]u_1(t_0,\mu)+\omega(\mu)u_2(t_1,\mu)+h_2(\mu),\tag{4.225}$$

而当 $t=t_1$ 时有

$$u_1(t_1,\mu)=\omega(\mu)u_1(t_0,\mu)+[B_{12}(1)B_{22}^{-1}(1)+\omega(\mu)]u_2(t_1,\mu)+h_3(\mu).\tag{4.226}$$

完全一样, 当 $t=t_1$ 时, 从 (4.222) 可得

$$u_2(t_1,\mu)=[B_{21}(1)B_{11}^{-1}(1)\omega(\mu)]u_1(t_1,\mu)+h_4(\mu).\tag{4.227}$$

我们来证明, 当 μ 充分小时, 关于 $u_1(t_0,\mu),u_2(t_0,\mu),u_1(t_1,\mu),u_2(t_1,\mu)$ 的线性方程组 (4.224) ~ (4.227) 有且只有一个解. 由于当 $\mu\to0$ 时, (4.224), (4.225) 的极

限方程与 (4.226), (4.227) 的极限方程完全分开, 因此我们只需分别证明对于 (4.224), (4.225) 和 (4.226), (4.227) 的齐次极限方程组都只有零解. 我们只就对应于 (4.224), (4.225) 的齐次极限方程组进行证明, 即方程组

$$u_1 = B_{12}(0)B_{22}^{-1}(0)u_2, \quad u_2 = B_{21}(0)B_{11}^{-1}(0)u_1.$$

为此我们考虑非退化变换 $u = B(0)\eta$, 或者写成分块的形式:

$$u_1 = B_{11}(0)\eta_1 + B_{12}(0)\eta_2, \quad u_2 = B_{21}(0)\eta_1 + B_{22}(0)\eta_2.$$

由此即见, 当 $\eta_1 = 0$ 时有

$$u_1 = B_{12}(0)B_{22}^{-1}(0)u_2, \tag{4.228}$$

而当 $\eta_2 = 0$ 时有

$$u_2 = B_{21}(0)B_{11}^{-1}u_1. \tag{4.229}$$

由于 $\eta = 0$ 时对应于唯一解 $u = 0$, 因此方程组 (4.228), (4.229) 只有零解, 所欲证明.

因此当 μ 充分小时, 由方程组 (4.224) ~ (4.227) 可以唯一决定 $u_1(t_0,\mu), u_2(t_0,\mu)$, $u_1(t_1,\mu), u_2(t_1,\mu)$ 的值, 将这些值代入 (4.220) ~ (4.222), 即可求出边值问题 (4.165), (4.219) 的解, 而且不难看出这个解是唯一的.

十、定理 4.2 的证明 我们回到余项 $u(t,\mu), v(t,\mu)$ 的方程组 (4.161), 并将其写成

$$\begin{cases} \mu\dfrac{du}{dt} = A(t,\mu)u + F_y(t,\mu)v + G_1(u,v,t,\mu), \\ \dfrac{dv}{dt} = f_z(t,\mu)u + f_y(t,\mu)v + G_2(u,v,t,\mu); \end{cases} \tag{4.230}$$

其中 $A(t,\mu) = \overline{F}_z(t) + \Pi_0 F_z(\tau_0) + Q_0 F_z(\tau_1)$ 满足第九段的条件 $1° \sim 4°$, 从而在第九段进行的所有构造对它都是正确的. 我们记得 G_1, G_2 还具有用不等式 (4.159), (4.160) 表示的两条重要性质.

我们把方程组 (4.230) 在条件 (4.162), (4.163) 之下的定解问题转化成可以运用逐次逼近法求解的积分方程组 (某些细节由于太繁复而略去了) .

由 (4.230) 的第二组方程可得

$$v(t,\mu) = V(t,0,\mu)v^0 + \int_0^t V(t,s,\mu)[f_z(s,\mu)u(s,\mu) + G_2(u,v,s,\mu)]ds, \tag{4.231}$$

这里 $V(t,s,\mu)$ 为齐次方程组

$$\frac{dV}{dt} = f_y(t,\mu)V, \quad V(s,s,\mu) = E_M,$$

的基本解矩阵; 由于 $f_y(t,\mu)$ 的有界性, 当 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时, 它满足不等式 $\| V(t,s,\mu) \| \leqslant c$. 引进记号

$$H(t,s,\mu) = V(t,s,\mu) f_z(s,\mu),$$
$$Q_2(u,v,t,\mu) = V(t,0,\mu)v^0 + \int_0^t V(t,s,\mu) G_2(u,v,s,\mu) ds$$

后, 可将 (4.231) 重写成

$$v(t,\mu) = \int_0^t H(t,s,\mu) u(s,\mu) ds + Q_2(u,v,t,\mu). \tag{4.232}$$

显然, 核 $H(t,s,\mu)$ 是有界的, 而积分算子 $Q_2(u,v,t,\mu)$ 具有类似于函数 G_1, G_2 性质的如下两条性质:

1. 当 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时有

$$\| Q_2(0,0,t,\mu) \| \leqslant c\mu^{n+1}.$$

这个不等式容易从 (4.164) 和 (4.159) 得到.

2. 对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists$ 常数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 和 $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon)$ 使得只要 $\| u_1(t,\mu) \| \leqslant \delta$, $\| u_2(t,\mu) \| \leqslant \delta$, $\| v_1(t,\mu) \| \leqslant \delta$, $\| v_2(t,\mu) \| \leqslant \delta$, 则当 $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时有

$$\begin{aligned} |Q_2(u_1,v_1,t,\mu) - Q_2(u_2,v_2,t,\mu)| \leqslant \varepsilon \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} [\| u_1(t,\mu) - u_2(t,\mu) \| \\ + \| v_1(t,\mu) - v_2(t,\mu) \|]. \end{aligned}$$

将 (4.232) 代入 (4.230) 的第一组方程即得

$$\mu \frac{du}{dt} = A(t,\mu)u + F_y(t,\mu) \int_0^t H(t,s,\mu) u(s,\mu) ds + Q_1(u,v,t,\mu), \tag{4.233}$$

其中 $Q_1(u,v,t,\mu) = G_1(u,v,t,\mu) + F_y(t,\mu) Q_2(u,v,t,\mu)$. 根据 (4.159), (4.160) 以及 $Q_2(u,v,t,\mu)$ 的两条性质, 算子 $Q_1(u,v,t,\mu)$ 具有与 $Q_2(u,v,t,\mu)$ 同样的性质.

在把 (4.233) 右端的后两项看成非齐次项, 以及利用第九段构造的矩阵 Green 函数 $\overset{(0)}{G}(t,s,\mu)$, $G(t,s,\mu)$ 和 $\overset{(1)}{G}(t,s,\mu)$ 之后, 我们可用 (4.220) ~ (4.222) 型的如下积分方程组来代替方程组 (4.233) 及其边界条件 (4.162):

$$\begin{aligned} u(t,\mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^{t_0} \overset{(0)}{G}(t,s,\mu) \Big[F_y(s,\mu) \int_0^s H(s,p,\mu) u(p,\mu) dp \\ + Q_1(u,v,s,\mu) \Big] ds + \overset{(0)}{u}_0(t,\mu), \quad 当 0 \leqslant t \leqslant t_0, \end{aligned} \tag{4.234}$$

$$\begin{aligned} u(t,\mu) = \frac{1}{\mu} \int_{t_0}^{t_1} G(t,s,\mu) \Big[F_y(s,\mu) \int_0^s H(s,p,\mu) u(p,\mu) dp \\ + Q_1(u,v,s,\mu) \Big] ds + u_0(t,\mu), \quad 当 t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \end{aligned} \tag{4.235}$$

$$u(t,\mu)=\frac{1}{\mu}\int_{t_1}^{1}\overset{(1)}{G}(t,s,\mu)\left[F_y(s,\mu)\int_0^s H(s,p,\mu)u(p,\mu)dp+Q_1(u,v,s,\mu)\right]ds+\overset{(1)}{u}_0(t,\mu),\quad 当\, t_1\leqslant t\leqslant 1. \tag{4.236}$$

我们将 (4.234) 右端的积分分开成两项, 并令

$$\overset{(0)}{L}u\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\mu}\int_0^{t_0}\overset{(0)}{G}(t,s,\mu)F_y(s,\mu)\left[\int_0^s H(s,p,\mu)u(p,\mu)dp\right]ds,$$

$$\overset{(0)}{Q}(u,v,t,\mu)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\mu}\int_0^{t_0}\overset{(0)}{G}(t,s,\mu)Q_1(u,v,s,\mu)ds.$$

对 (4.235) 和 (4.236) 的右端也进行类似的表示: Lu, $Q(u,v,t,\mu)$ 和 $\overset{(1)}{L}u$, $\overset{(1)}{Q}(u,v,t,\mu)$. 根据上段对矩阵 Green 函数 $\overset{(0)}{G}(t,s,\mu), G(t,s,\mu), \overset{(1)}{G}(t,s,\mu)$ 得到的指数式估计, 以及 $Q_1(u,v,t,\mu)$ 的两条性质, 积分算子 $\overset{(0)}{Q}(u,v,t,\mu)$, $Q(u,v,t,\mu)$, $\overset{(1)}{Q}(u,v,t,\mu)$ 也具有与 $Q_1(u,v,t,\mu)$ 同样的两条性质.

我们首先研究 $\overset{(0)}{L}u$; 将积分 $\int_0^{t_0}$ 分成两项之和: $\int_0^t+\int_t^{t_0}$, 然后对每一项进行分部积分即得

$$\begin{aligned}\overset{(0)}{L}u=&\frac{1}{\mu}\left[\int_0^s\overset{(0)}{G}(t,p,\mu)F_y(p,\mu)dp\right]\left[\int_0^s H(s,p,\mu)u(p,\mu)dp\right]\Bigg|_0^t\\&-\frac{1}{\mu}\int_0^t\left[\int_0^s\overset{(0)}{G}(t,p,\mu)F_y(p,\mu)dp\right]\frac{d}{ds}\left[\int_0^s H(s,p,\mu)u(p,\mu)dp\right]ds\\&+\frac{1}{\mu}\left[\int_{t_0}^s\overset{(0)}{G}(t,p,\mu)F_y(p,\mu)dp\right]\left[\int_0^s H(s,p,\mu)u(p,\mu)dp\right]\Bigg|_t^{t_0}\\&-\frac{1}{\mu}\int_t^{t_0}\left[\int_{t_0}^s\overset{(0)}{G}(t,p,\mu)F_y(p,\mu)dp\right]\frac{d}{ds}\left[\int_0^s H(s,p,\mu)u(p,\mu)dp\right]ds.\end{aligned}$$

并将这个等式的右端四项分别记为 $\overset{(0)}{L}_1u$, $\overset{(0)}{L}_2u$, $\overset{(0)}{L}_3u$, $\overset{(0)}{L}_4u$. 此外, 引进记号

$$\overset{(0)}{K}_1(t,s,\mu)\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\mu}\int_0^s\overset{(0)}{G}(t,p,\mu)F_y(p,\mu)dp, \tag{4.237}$$

于是合并 $\overset{(0)}{L}_1u$ 和 $\overset{(0)}{L}_3u$ 即得

$$\overset{(0)}{L}_1u+\overset{(0)}{L}_3u=\overset{(0)}{K}_1(t,t_0,\mu)\int_0^t H(t,s,\mu)u(s,\mu)ds\overset{\text{def}}{=}\int_0^t\overset{(0)}{K}(t,s,\mu)u(s,\mu)ds,$$

其中 $\overset{(0)}{K}(t,s,\mu)\overset{\text{def}}{=}\overset{(0)}{K}_1(t,t_0,\mu)H(t,s,\mu)$. 根据对 $\overset{(0)}{G}(t,s,\mu)$ 的估计式 (4.216) 以及 $\overset{(0)}{K}_1(t,s,\mu)$ 的表达式 (4.237) 即可推出 $\overset{(0)}{K}_1(t,s,\mu)$ 的有界性, 亦即 $\overset{(0)}{K}(t,s,\mu)$ 的有界性.

其次我们研究 $\overset{(0)}{L_2} u$, 因为 $H(s,p,\mu) = V(s,p,\mu) f_z(p,\mu)$, $\dfrac{dV(s,p,\mu)}{ds} = f_y(s,\mu) V(s,p,\mu)$, $V(s,s,\mu) = E_m$, 所以

$$\frac{d}{ds}\int_0^s H(s,p,\mu)u(p,\mu)dp = H(s,s,\mu)u(s,\mu) + \int_0^s \frac{dH(s,p,\mu)}{ds}u(p,\mu)dp$$
$$= f_z(s,\mu)u(s,\mu) + \int_0^s f_y(s,\mu)H(s,p,\mu)u(p,\mu)dp.$$

利用最后这个等式及记号 (4.237) 即得

$$\overset{(0)}{L_2} u = -\int_0^t \overset{(0)}{K_1}(t,s,\mu)\Big[f_z(s,\mu)u(s,\mu) + \int_0^s f_y(s,\mu)H(s,p,\mu)u(p,\mu)dp\Big]ds. \quad (4.238)$$

从 (4.237) 及 (4.216) 得出, 当 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_0$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时有不等式

$$\Big\|\overset{(0)}{K_1}(t,s,\mu)\Big\| \leqslant \int_0^s \frac{1}{\mu} c \exp\Big(-\frac{\kappa(t-p)}{\mu}\Big)dp \leqslant c \exp\Big(-\frac{\kappa(t-s)}{\mu}\Big)$$

成立, 由此即得

$$\int_0^t \Big\|\overset{(0)}{K_1}(t,s,\mu)\Big\|ds \leqslant c\mu. \quad (4.239)$$

现在从 (4.238) 不难推出线性积分算子 $\overset{(0)}{L_2}$ 具有与 $\overset{(0)}{Q}$ 一样的两条性质. 事实上, 由于当 $u = 0$ 时有 $\overset{(0)}{L_2} u = 0$, 即知第一条性质成立, 而第二条性质由 (4.239) 即可得到.

类似地可以证明, $\overset{(0)}{L_4}$ 也具有同样的两条性质. 下面我们将用 L_ε 记一切具有上述两条性质的线性算子. 因此

$$\overset{(0)}{L} u = \int_0^t \overset{(0)}{K}(t,s,\mu)u(s,\mu)ds + L_\varepsilon u, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0. \quad (4.240)$$

我们现在转到 (4.235) 并研究积分

$$Lu \equiv \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\mu}G(t,s,\mu)F_y(s,\mu)\Big[\int_0^s H(s,p,\mu)u(p,\mu)dp\Big]ds;$$

将被积函数中的积分 $\displaystyle\int_0^s$ 分成两个积分之和: $\displaystyle\int_0^{t_0} + \int_{t_0}^s$, 由此可得

$$Lu = \int_0^{t_0} K(t,s,\mu)u(s,\mu)ds + \widehat{L}u,$$

其中 $K(t,s,\mu) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\mu}G(t,p,\mu)F_y(p,\mu)H(p,s,\mu)dp$ 当 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $0 \leqslant s \leqslant t_0$ 时, 由 (4.191) 即知它也是一个有界核, 而

$$\widehat{L}u = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\mu}G(t,s,\mu)F_y(s,\mu)\Big[\int_{t_0}^s H(s,p,\mu)u(p,\mu)dp\Big]ds.$$

像对 $\overset{(0)}{L} u$ 那样对 $\widehat{L}u$ 进行变换之后, 可得类似于 (4.240) 的等式

$$\widehat{L}u = \int_{t_0}^{t} K(t,s,\mu)u(s,\mu)ds + L_\varepsilon u.$$

其中

$$K(t,s,\mu) = \left[\int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{\mu} G(t,p,\mu)F_y(p,\mu)dp\right] H(t,s,\mu),$$

当 $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, $t_0 \leqslant s \leqslant t$ 时, 由 (4.191) 即知它也是一个有界核, 因此

$$Lu = \int_0^t K(t,s,\mu)u(s,\mu)ds + L_\varepsilon u, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_1. \tag{4.241}$$

最后, 类似于 Lu, 对 $\overset{(1)}{L} u$ 进行变换之后可得

$$\begin{aligned}\overset{(1)}{L} u &\equiv \textstyle\int_{t_1}^1 \frac{1}{\mu} \overset{(1)}{G} (t,s,\mu)F_y(s,\mu)\left[\int_0^s H(s,p,\mu)u(p,\mu)dp\right]ds \\ &= \textstyle\int_0^t \overset{(1)}{K} (t,s,\mu)u(s,\mu)ds + L_\varepsilon u, \quad t_1 \leqslant t \leqslant 1,\end{aligned} \tag{4.242}$$

其中 $\overset{(1)}{K} (t,s,\mu)$ 当 $t_1 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant t$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时是一个有界核.

利用 (4.240), (4.241), (4.242), 并保留具有前述两条性质的和式 $\overset{(0)}{Q} + L_\varepsilon u$, $Q + L_\varepsilon u$, $\overset{(1)}{Q} + L_\varepsilon u$ 中的前一个记号 $\overset{(0)}{Q}$, Q, $\overset{(1)}{Q}$, 将方程组 (4.234) ~ (4.236) 重写成

$$\begin{aligned}
&u(t,\mu) = \overset{(0)}{u}_0 (t,\mu) + \int_0^t \overset{(0)}{K} (t,s,\mu)u(s,\mu)ds + \overset{(0)}{Q} (u,v,t,\mu), \quad \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant t_0; \\
&u(t,\mu) = u_0(t,\mu) + \int_0^t K(t,s,\mu)u(s,\mu)ds + Q(u,v,t,\mu), \quad \text{当 } t_0 \leqslant t \leqslant t_1; \\
&u(t,\mu) = \overset{(1)}{u}_0 (t,\mu) + \int_0^t \overset{(1)}{K} (t,s,\mu)u(s,\mu)ds + \overset{(1)}{Q} (u,v,t,\mu), \quad \text{当 } t_1 \leqslant t \leqslant 1.
\end{aligned} \tag{4.243}$$

类似于在第九段对方程组 (4.220) ~ (4.222) 所进行的讨论, 我们从方程组 (4.243) 求出含在 $\overset{(0)}{u}_0 (t,\mu)$, $u_0(t,\mu)$, $\overset{(1)}{u}_0 (t,\mu)$ 中的值 $u_1(t_0,\mu)$, $u_2(t_0,\mu)$, $u_1(t_1,\mu)$, $u_2(t_1,\mu)$. 在第九段曾证明完成这种运算是唯一的. 所得到的关于 $u_1(t_0,\mu)$, $u_2(t_0,\mu)$, $u_1(t_1,\mu)$, $u_2(t_1,\mu)$ 的表达式将含有积分项

$$\left(\int_0^{t_0} \overset{(0)}{K} (t_0,s,\mu)u(s,\mu)ds\right)_1, \quad \left(\int_0^{t_0} K(t_0,s,\mu)u(s,\mu)ds\right)_2,$$
$$\left(\int_0^{t_1} K(t_1,s,\mu)u(s,\mu)ds\right)_1, \quad \left(\int_0^{t_1} \overset{(1)}{K} (t_1,s,\mu)u(s,\mu)ds\right)_2;$$

我们将这些积分的每一个, 与积分算子 $\overset{(0)}{Q}$, Q, $\overset{(1)}{Q}$ 的分块, 以及满足不等式 $\| u^0 \| \leqslant c\mu^{n+1}$ (参看 (4.164)) 的向量 u^0 的分块, 都用记号 $\widetilde{L}u$ 表示. 将这些表达式代回到

(4.243), 于是由 (4.214), (4.189) 和 (4.217) 即知, 每一个 $\widetilde{L}u$ 型的积分项在 (4.243) 的第一组方程是位于 $O\left(\exp\left(-\dfrac{\kappa(t_0-t)}{\mu}\right)\right)$ 阶的因子中, 在第二组方程是位于 $O\left(\exp\left(-\dfrac{\kappa(t-t_0)}{\mu}\right)\right)$ 或者 $O\left(\exp\left(-\dfrac{\kappa(t_1-t)}{\mu}\right)\right)$ 阶的因子中, 在第三组方程是位于 $O\left(\exp\left(-\dfrac{\kappa(t-t_1)}{\mu}\right)\right)$ 阶的因子中. 我们用 L_μ 记任何一个这种因子与 $\widetilde{L}u$ 型积分项的乘积; 显然, 对相应区间上的任意点 t_1 和 t_2 、任意的有界函数 $f(t,\mu)$, 以及线性积分算子 L_μ 的核 $K_\mu(t,s,\mu)$, 满足条件

$$\int_{t_1}^{t_2}\|K_\mu(t,s,\mu)f(t,\mu)\|dt=O(\mu). \tag{4.244}$$

从项 $\overset{(0)}{u}_0(t,\mu)$, $u_0(t,\mu)$, $\overset{(1)}{u}_0(t,\mu)$ 中抽出 $L_\mu u$ 型的项, 并将剩下的项相应地放进算子 $\overset{(0)}{Q}(u,v,t,\mu)$, $Q(u,v,t,\mu)$, $\overset{(1)}{Q}(u,v,t,\mu)$, 这些算子仍然保持上述两条性质. 引进记号

$$\widetilde{K}(t,s,\mu)=\begin{cases}\overset{(0)}{K}(t,s,\mu), & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_0,\ 0\leqslant s\leqslant t,\\ K(t,s,\mu), & \text{当 } t_0\leqslant t\leqslant t_1,\ 0\leqslant s\leqslant t,\\ \overset{(1)}{K}(t,s,\mu), & \text{当 } t_1\leqslant t\leqslant 1,\ 0\leqslant s\leqslant t;\end{cases}$$

$$\widetilde{Q}(u,v,t,\mu)=\begin{cases}\overset{(0)}{Q}(u,v,t,\mu), & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_0,\\ Q(u,v,t,\mu), & \text{当 } t_0\leqslant t\leqslant t_1,\\ \overset{(1)}{Q}(u,v,t,\mu), & \text{当 } t_1\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

于是可将 (4.243) 式写成

$$u(t,\mu)=\int_0^t\widetilde{K}(t,s,\mu)u(s,\mu)ds+L_\mu u+\widetilde{Q}(u,v,t,\mu). \tag{4.245}$$

此外, 利用核 $\widetilde{K}(t,s,\mu)$ 的预解式 $\widetilde{R}(t,s,\mu)$ (由 $\widetilde{K}(t,s,\mu)$ 的有界性可知 $\widetilde{R}(t,s,\mu)$ 也是有界的) . 我们可用与 (4.245) 等价的积分方程

$$\begin{aligned}u(t,\mu)&=L_\mu u+\widetilde{Q}(u,v,t,\mu)+\int_0^t\widetilde{R}(t,s,\mu)\Big[L_\mu u+\widetilde{Q}(u,v,s,\mu)\Big]ds\\&\equiv L_\mu u+S(u,v,t,\mu)\end{aligned} \tag{4.246}$$

来代替它; 由于 (4.244) 及 $\widetilde{Q}$ 的两条性质, 因此这里的 $S(u,v,t,\mu)$ 也具有与 $\widetilde{Q}(u,v,t,\mu)$ 相同的两条性质.

至于方程 (4.246), 我们借助于线性积分算子 L_μ 的核 $K_\mu(t,s,\mu)$ 的预解式 $R_\mu(t,s,\mu)$ (其存在性和有界性可由核 $K_\mu(t,s,\mu)$ 的性质 (4.244) 推出), 可用与它等

价的积分方程

$$u(t,\mu)=S(u,v,t,\mu)+\int_0^1 R_\mu(t,s,\mu)S(u,v,s,\mu)ds\equiv S_1(u,v,t,\mu) \tag{4.247}$$

代替它, 其中积分算子 $S_1(u,v,t,\mu)$ 也具有与 $S(u,v,t,\mu)$ 同样的两条性质.

关于 $u(t,\mu),v(t,\mu)$ 的积分方程组 (4.232), (4.247) 与方程组 (3.103), (3.104) 完全相似, 因此像在第三章那样, 可用逐次逼近法证明其解的存在性, 并得到估计 $\|u(t,\mu)\|\leqslant c\mu^{n+1}$, $\|v(t,\mu)\|\leqslant c\mu^{n+1}$, 由此即得 (4.150).

为了证明定理 4.2 结论中解的局部唯一性, 我们注意到对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 使得只要在曲线 L_0 (见第六段) 的 δ 邻域中, 存在边值问题的两个解 u_1,v_1 和 u_2,v_2, 则由 Q_2 的第二条性质以及 S_1 的类似性质, 根据 (4.247) 和 (4.232) 即得

$$\begin{aligned}
&\|u_1(t,\mu)-u_2(t,\mu)\|\leqslant\varepsilon\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\Big[\|u_1(t,\mu)-u_2(t,\mu)\|+\|v_1(t,\mu)-v_2(t,\mu)\|\Big],\\
&\|v_1(t,\mu)-v_2(t,\mu)\|\leqslant c\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\|u_1(t,\mu)-u_2(t,\mu)\|\\
&\qquad\qquad+\varepsilon\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\Big[\|u_1(t,\mu)-u_2(t,\mu)\|+\|v_1(t,\mu)-v_2(t,\mu)\|\Big];
\end{aligned}$$

由此得出

$$\begin{aligned}
&\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\Big[\|u_1(t,\mu)-u_2(t,\mu)\|+\|v_1(t,\mu)-v_2(t,\mu)\|\Big]\\
&\qquad\leqslant(c+2)\varepsilon\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\Big[\|u_1(t,\mu)-u_2(t,\mu)\|+\|v_1(t,\mu)-v_2(t,\mu)\|\Big];
\end{aligned}$$

取 $\varepsilon<\dfrac{1}{c+2}$ 即得

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\Big[\|u_1(t,\mu)-u_2(t,\mu)\|+\|v_1(t,\mu)-v_2(t,\mu)\|\Big]=0,$$

从而 $u_1(t,\mu)\equiv u_2(t,\mu)$, $v_1(t,\mu)\equiv v_2(t,\mu)$. 定理 4.2 证毕.

注 在 B. A. Тупчиев 工作中, 他在稍微不同的假设下证明了类似于定理 4.2 的定理 (参看 [57]). 他在特征值 $\overline{\lambda}_i(t)$ 上只加上条件 (4.96). 但是为了保证零阶边界层项 $\Pi_0 z(\tau_0), Q_0 z(\tau_1)$ 很小, 他要求 $\|a(z^0-\overline{z}_0(0))\|$ 和 $\|b(z^0-\overline{z}_0(1))\|$ 充分小, 这与定理4.2 的条件相比较是一个实质性限制. 在这些条件下, 不难按照 [60] 的办法证明定理. 作为方程组 (4.158) 中 u,v 的系数应当取 $\overline{F}_z(t),\overline{F}_y(t),\overline{f}_z(t),\overline{f}_y(t)$. 这时函数 G_1,G_2 满足不等式 (4.159), 而在 $\|\Pi_0 z(\tau_0)\|$ 和 $\|Q_0 z(\tau_1)\|$ 充分小的假设下, 它们还满足不等式 (4.160). 其次应当做变量替换 $u=T(t)\binom{w_1}{w_2}$, 其中矩阵 $T(t)$ 将 $\overline{F}_z(t)$ 变成对角分块阵

$$T^{-1}(t)\overline{F}_z(t)T(t)=\begin{bmatrix}C^+(t) & 0\\ 0 & C^-(t)\end{bmatrix},$$

这里 $C^+(t)$ 是以 $\overline{\lambda}_1(t),\cdots,\overline{\lambda}_k(t)$ 为特征值的矩阵, $C^-(t)$ 是以 $\overline{\lambda}_{k+1}(t),\cdots,\overline{\lambda}_M(t)$ 为特征值的矩阵 [53] 中证明了这种矩阵 $T(t)$ 的存在性. 其次利用齐次方程组

$$\mu\frac{sW_1}{dt}=C^+(t)W_1,\quad \frac{dW_2}{dt}=C^-(t)W_2$$

的基本解矩阵 $W_1(t,s,\mu)$ 和 $W_2(t,s,\mu)$, 根据引理 3.2, 它们满足估计

$$\|W_1(t,s,\mu)\| \leqslant c\exp\left(-\frac{\kappa(t-s)}{\mu}\right),\quad 当\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1,\ 0<\mu\leqslant\mu_0,$$

$$\|W_2(t,s,\mu)\| \leqslant c\exp\left(-\frac{\kappa(s-t)}{\mu}\right),\quad 当\ 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1,\ 0<\mu\leqslant\mu_0;$$

可以将关于 w_1, w_2, v 的方程组 (类似于第三章所做的那样) 转变成积方程组, 而对于后者用逐次逼近法容易证明所论边值问题在退化解的邻域中存在唯一解及估计式 (4.150).

更为复杂的定理 4.2 证明, 恰好是与 $\|a(z^0-\overline{z}_0(0))\|$ 和 $\|b(z^0-\overline{z}_0(1))\|$ 不是很小有关.

十一、更一般的定解条件　假设方程组 (4.89) 的边界条件有与 §13 同样的形式

$$R(z(0,\mu),y(0,\mu),z(1,\mu),y(1,\mu))=0, \tag{4.248}$$

其中 R 为 $(M+m)$ 维向量; 这时可以按照 §13 中提出的格式进行讨论, 但是现在作为辅助问题的解, 我们不用初值问题的解, 而是用以 (4.90), (4.91) 为边界条件的边值问题的解代入 (4.248), 此外我们还假设

$$\begin{cases} z_i^0 = z_i^0(\mu) = z_{0i}+\mu z_{1i}+\cdots+\mu^k z_{ki}+\cdots, \quad i=1,2,\\ y^0 = y^0(\mu) = y_0+\mu y_1+\cdots+\mu^k y_k+\cdots. \end{cases} \tag{4.249}$$

这时在本节第 5 段所描述的构造渐近解的计算方法应有所修改 (类似于在 §11 第 3 段中当初始条件依赖于 μ 所做的变动) .

用辅助问题精确解的渐近展开代替精确解本身代入 (4.248), 并比较 μ 同次幂的项, 即得决定 (4.249) 中事先未知的系数方程.

由 (4.248) 的零次近似即得

$$R_0 \equiv R(\overline{z}_0(0)+\Pi_0 z(0),\overline{y}_0(0),\overline{z}_0(1)+Q_0z(0),\overline{y}_0(1))=0. \tag{4.250}$$

这个方程组的未知量是向量 $\Pi_0z(0)$ 的 k 个分量 ($\Pi_0z(0)$ 的其余 $(M-k)$ 个分量可以利用 $\Pi_0z(0)$ 位于 S^+ 上的条件而通过这 k 个分量来求出) 、向量 $Q_0z(0)$ 的 $(M-k)$ 个分量以及 $\overline{y}_0(0)-y_0$ 的 m 个分量 ($\overline{y}_0(1), \overline{z}_0(0)$ 和 $\overline{z}_0(1)$ 都是 y_0 的函数, 它们都可以从退化方程组 (4.117) 求出) . 这时, 就像 $\Pi_0z(0)$ 只有 k 个分量是未知的那样, 我们认为 $Q_0z(0)$ 也只有 $(M-k)$ 个分量是未知的. 但到底是哪 $(M-k)$ 个分量作为独立未知量呢? 这就要看 S^+ 和 S^- 的分析表达式而定. 在条件 V 中, 我们曾认为 k 个独立未知量就是以 ζ 的头 k 个分量为分量的向量 ζ_1, 但是作为 ζ_1 也可以取任何其他一个有 k 个分量的向量块, 而且应当认为只有 $\Pi_0z(0)$ 的这些分量是未知的. 对于 $Q_0z(0)$ 也有类似的情况. 总之, (4.250) 是一个由 $(M+m)$ 个方程组成的且正好有 $(M+m)$ 个未知量的方程组. 我们认为这个方程组是可解的, 且其对应的行列式 (见 §13) 不为零. 因此 (4.249) 中的零次项可决定如下:

$$y_0=y_0^0,\quad z_{01}=\overline{z}_{01}(0)+(\Pi_0z(0))_1=z_{01}^0,\quad z_{02}=\overline{z}_{02}(1)+(Q_0z(0))_2=z_{02}^0.$$

其次从 (4.248) 可得一系列其行列式不为零的线性方程组, 由这些方程组就可以逐次求出 (4.249) 零次以后的各项系数.

这样一来, 在条件稳定的情况下, 对于边界条件 (4.248) 的问题也可以运用在 §13 中所使用过的构造渐近解的方法来求解. 不过现在我们不详细研究在 x_0^0 邻域中 $X^0(\mu)$ 的存在性问题. 如果这样的 $X^0(\mu)$ 存在, 那么只要在 (4.90), (4.91) 中取 $z^0 = Z^0(\mu)$, $y^0 = Y^0(\mu)$, 则边值问题 (4.89) ~ (4.91) 的解 $X(t,\mu)$ 就是边值问题 (4.89), (4.248) 的精确解.

对于条件稳定的情况不仅可以研究以 (4.248) 为定解条件的两点边值问题, 而且还可以讨论其他的定解条件问题.

条件稳定情况下的一类典型问题是含有小参数的变分问题, 这类问题当小参数 $\mu = 0$ 时产生了退化, 下面我们考虑其中最简单的一个问题.

假设给定的泛函为

$$J(y) = \int_0^1 F(t, y, \mu y')dt. \tag{4.251}$$

我们来求解这个泛函在固定边界条件

$$y(0,\mu) = 0, \quad y(1,\mu) = 0 \tag{4.252}$$

之下的极值问题. 这时 (4.251) 的 Euler 方程为

$$F_2 - \mu F_{31} - \mu F_{32} y' - \mu^2 F_{33} y'' = 0,$$

(其中 F 的下标表示函数 F 关于三个变量的相应偏导数, 例如 $F_{32} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}$, 这里 $z = \mu y'$). 令 $\mu y' = z$, 在 $F_{33} \neq 0$ 的假设下, 把上面的方程写成方程组 (4.253) 就是

$$\mu \frac{dz}{dt} = \frac{F_2 - F_{32} z - \mu F_{31}}{F_{33}}, \quad \mu \frac{dy}{dt} = z; \tag{4.253}$$

这是 (4.89) 类型的方程组, 所不同的只是在此方程组的右端含有 μ, 但这并非实质性问题 (见 §11 第 5 段) .

由 (4.253) 即见其退化方程组为

$$\overline{F}_2 - \overline{F}_{32} \overline{z} = 0, \quad \overline{z} = 0;$$

由此得出 $\overline{z}(t) = 0$, 而 $\overline{y}(t)$ 则由 $\overline{F}_2 \equiv F_z(t, \overline{y}, 0) = 0$ 的根 $\overline{y} = \varphi(t)$ 得到. 这时的特征方程为

$$\det \begin{bmatrix} -\overline{\lambda} & \dfrac{F_{22}(t,\varphi(t),0)}{F_{33}(t,\varphi(t),0)} \\ 1 & -\overline{\lambda} \end{bmatrix} = 0,$$

亦即 $\overline{\lambda}^2 = \dfrac{F_{22}(t,\varphi(t),0)}{F_{33}(t,\varphi(t),0)}$. 如果 $\dfrac{F_{22}}{F_{33}} > 0$, 那么根 $\overline{\lambda}_1(t)$ 和 $\overline{\lambda}_2(t)$ 就有不同的符号, 于是 Euler 方程组 (4.253) 和定解条件 (4.252) 就是在条件稳定情况下边值问题 (4.89), (4.248) 的一个特例.

如果代替最简单的问题 (4.251), (4.252) 而考虑等周问题, 亦即对边界条件 (2.252) 还补充条件

$$\int_0^1 G(t,y,z)dt = l \tag{4.254}$$

的问题, 那么 Euler 方程组中除了含有未知函数 y 和 z 之外, 还应当包含有未知参数 λ, 这时的定解条件是 (4.252) 和 (4.254) 式. 对于这个问题也可以应用上述的方法. 不过对于未知参数 λ 应当找它关于 μ 展开的形式 (见 §13 的第 3 段) $\lambda = \lambda_0 + \mu\lambda_1 + \cdots + \mu^k\lambda_k + \cdots$. 将 Euler 方程组在含有参数 λ_k 的条件 (4.252) 之下的解的渐近展开式代入 (4.254) 式, 并比较 μ 的同次幂系数, 即得逐次确定 $\lambda_0, \lambda_1, \cdots$ 的方程. 关于如何完成把 (4.104) 型级数的运算变成对 μ 幂次逐项展开的积分表式, 将在专门讨论积分–微分方程的第五章进行详细研究. 还有一个可归结为条件稳定情形的变分问题例子是如下的最优控制问题 (u 为控制参量)

$$\mu\frac{dz}{dt} = f(t,z,u), \quad J(z,u) = \int_0^1 F(t,z,u)dt = \min; \quad z(0,\mu) = z^0, \quad z(1,\mu) = z^1.$$

工作 [2, 3] 中研究了所列举的变分问题.

最后, 我们特别注意 (4.248) 的一个重要特殊情形, 这就是方程组 (4.89) 的周期解存在性问题. 假设 (4.89) 的右端对 t 是以 T 为周期 (非自治方程组) . 不失一般性, 我们不妨令 $T=1$. 那么所要找的解的周期性条件为 $x(0,\mu) = x(1,\mu)$, 这是条件 (4.248) 的特殊情形. 假设方程 $F(z,y,t) = 0$ 有根 $z = \varphi(y,t)$, 于是按照本段开始所说的办法进行求解即得

$$\begin{aligned}(\overline{z}_0(0) + \Pi_0 z(0)) + \mu(\overline{z}_1(0) + \Pi_1 z(0)) + \cdots \\ = (\overline{z}_0(1) + Q_0 z(0)) + \mu(\overline{z}_1(1) + Q_1 z(0)) + \cdots,\end{aligned} \tag{4.255}$$

$$y_0 + \mu y_1 + \cdots = \overline{y}_0(1) + \mu\overline{y}_1(1) + \cdots. \tag{4.256}$$

由 (4.256) 的零次近似即得

$$y_0 = \overline{y}_0(1). \tag{4.257}$$

因为从 (4.124) 有 $\overline{y}_0(0) = y_0$, 所以由 (4.257) 即见退化方程组中 y 分量的周期性条件为

$$\overline{y}_0(0) = \overline{y}_0(1). \tag{4.258}$$

这个条件在对所论问题的各种研究中都遇到过 (例如, 参看 Д. А. 阿纳索夫 (Д. А. Аносов) 的文章 [1], Л. 埃莱托 (Л. Флзтто) 和 Н. 勒维索 (Н. Левинсон) 的文章 [60]① 等等), 不过值得我们注意的是无论这些研究工作中的哪一个, 都不曾把周期解问题看成边值问题的特殊情形.

①即文章 Flatto L. and Levinson N. Periodic solution of singular perturbed systems[J]. J. Rat Math Anal. 1954, 4: 943-950 —— 译者注.

考虑到从 (4.258) 有 $\overline{z}_0(0)=\overline{z}_0(1)$, 于是由 (4.255) 即得

$$\Pi_0 z(0)=Q_0 z(0); \tag{4.259}$$

而 $\Pi_0 z$ 和 $Q_0 z$ 是由方程组 (见 (4.125))

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau}=F(\varphi(y_0,0)+\Pi_0 z,y_0,0),\quad \tau=\tau_0=\frac{t}{\mu}, \tag{4.260}$$

$$\frac{dQ_0 z}{d\tau}=F(\varphi(\overline{y}_0(1),1)+Q_0 z,\overline{y}_0(1),1),\quad \tau=\tau_1=\frac{t-1}{\mu} \tag{4.261}$$

所确定. 由于 F 对 t 以 $T=1$ 为周期的周期性, 以及由于 (4.257), 因此方程组 (4.260) 与 (4.261) 是一样的, 所不同的只是在 (4.260) 中的 τ 是从 0 变到 ∞, 而在 (4.261) 中的 τ 是从 $-\infty$ 变到 0. 条件 (4.259) 意味着 $\Pi_0 z$ 是 $Q_0 z$ 的延拓. 由于 $Q_0 z(-\infty)=0$, 而 $\Pi_0 z(\infty)=0$, 所以 $\Pi_0 z$ 和 $Q_0 z$ 只有在下述情况下才可能不为零, 即方程组 $\dfrac{dz}{d\tau}=F(z,y_0,0)$ 在相空间中有从 $\varphi(y_0,0)$ 出发且通过这一点 (回线) 的闭轨线. 若抛开这种特殊情况不说, 我们可得

$$\Pi_0 z=Q_0 z\equiv 0. \tag{4.262}$$

其次从 (4.256) 即得

$$y_1=\overline{y}_1(1); \tag{4.263}$$

此外有 (见 (3.123))

$$\overline{y}_1(0)=y_1+\int_0^{\infty}\Pi_0 f(\tau)d\tau. \tag{4.264}$$

但是由 (4.262) 有 $\Pi_0 f(\tau)\equiv 0$, 因此从 (4.263), (4.264) 即得 $\overline{y}_1(0)=\overline{y}_1(1)$.

正如本段开始时所说, 方程 $R_0=0$ 关于 y_0, $\Pi_0 z(0)$ 的 k 个分量和 $Q_0 z(0)$ 的 $(M-k)$ 个分量的可解性, 以及对应的行列式不为零, 这就足以保证方程组 $R_k=0$ 关于 y_k, $\Pi_k z(0)$ 和 $Q_k z(0)$ 对应分量的可解性. 在所论方程的周期解问题中, 关于 y_0 和 y_1 是分开的 (见 (4.257) 和 (4.263)), 因此对于任意的 y_k 也是这样. 不难直接验证, 由 (4.257) 关于 y_0 的可解性, 以及其对应的行列式

$$\frac{D(\overline{y}_0(1,y_0)-y_0)}{Dy_0}\neq 0, \tag{4.265}$$

就足以保证 (4.263) 对 y_1 的可解性; 换句话说, 可以证明 $\overline{y}_0(t)$ 的周期性条件与条件 (4.265) 一起就足以保证周期解 $\overline{y}_1(t)$ 的存在性 (在许多有关周期解的工作中, 也利用条件 (4.265), 但通常是利用其他的等价形式) .

研究了渐近展开式中后面的一些项之后, 不难得到对所有的 k 都有 $\Pi_k x=Q_k x\equiv 0$, 例如对于 $k=1$, $\Pi_1 y$ 和 $Q_1 y$ 成为零就是 (4.262) 的直接结果. 至于 $\Pi_1 z$ 和 $Q_1 z$, 由 (4.262) 即知, 它们都满足同一个常系数方程组

$$\frac{d\Pi_1 z}{d\tau}=F_z(\varphi(y_0,0),y_0,0)\Pi_1 z,\quad \tau\geqslant 0,$$

$$\frac{dQ_1 z}{d\tau} = F_z(\varphi(y_0, 0), y_0, 0)Q_1 z, \quad \tau \leqslant 0;$$

由此方程组和类似于 (4.259) 的条件 $\Pi_1 z(0) = Q_1 z(0)$, 以及条件 $\Pi_1 z(\infty) = 0$, $Q_1 z(-\infty) = 0$ 即得 $\Pi_1 z = Q_1 z \equiv 0$. 对其余的 k 可类似地证明. 至于 $\overline{x}_k(t)$, 则所有 $\overline{y}_k(t)$ 都应当满足周期性条件 $\overline{y}_k(0) = \overline{y}_k(1)$, 而这个条件可以得到满足, 正如对于 $k = 1$ 那样也是由于条件 (4.265). 作为 $\overline{y}_k(t)$ 的周期性结果可得 $\overline{z}_k(t)$ 的周期性.

这样一来, *边界层项*的出现就成为周期解问题特有的奇异性, 其解的渐近展开也是系数依赖于 t 的 μ 的幂级数.

当方程组 (4.89) 为自治的情形时, 亦即其右端不显含 t, 我们就不再详细讨论. 我们只注意到这时周期 T 预先是不知道的, 因此也应当把 T 作为 μ 的展开式. 于是我们碰到一个在边界条件中含有未知参数的问题 (见 §13 第 3 段) . 对于稳定的情形, 有关这方面的工作可参看 [16].

§15. 含有内部边界层的边值问题

1. 引论 直到目前为止, 我们已经讨论了构造奇摄动边值问题的解当 $\mu \to 0$ 时的极限向量函数, 而且在进行渐近构造时, 一般只考虑方程 $F(z, y, t) = 0$ 加上一定条件的一个根 $z = \varphi(y, t)$.

但是当构造极限向量函数时可能遇到必须不只利用方程 $F(z, y, t) = 0$ 的一个根, 亦即需要利用它的几个不同的根 $z = \overset{(i)}{\varphi}(y, t)$. 这时在区间 [0, 1] 的内部出现了这样的一种狭窄区域, 在此区域中所论边值问题的解从一个根 $\overset{(j)}{\varphi}$ 的退化解邻域很快地转移到另一个根 $\overset{(k)}{\varphi}$ 的退化解邻域 (我们简单地称它为从根 $\overset{(j)}{\varphi}$ 到根 $\overset{(k)}{\varphi}$ 的*转移*), 亦即出现所谓的*内部边界层*现象. 本节就是讨论这种情况的.

2. 从左稳定根到右稳定根的转移[1] 我们首先考虑如下典型的情况 (z 和 y 均为数值函数) :

$$\mu \frac{dz}{dt} = F(z, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1; \tag{4.266}$$

$$y(0, \mu) = 0, \quad y(1, \mu) = 0. \tag{4.267}$$

假设方程 $F(z, y, t) = 0$ 有两个根 $z = \overset{(i)}{\varphi}(y, t)$, $i = 1, 2$; 对应于这两个根的退化方程组为

$$\frac{d\overset{(i)}{\overline{y}}}{dt} = \overset{(i)}{\overline{z}}, \quad \overset{(i)}{\overline{z}} = \overset{(i)}{\varphi}\left(\overset{(i)}{\overline{y}}, t\right) \quad i = 1, 2.$$

令 $\overset{(1)}{\overline{y}}(t)$ 为 $i = 1$ 时满足 (4.267) 第一个条件的退化解, 即 $\overset{(1)}{\overline{y}}(0) = 0$; 而 $\overset{(2)}{\overline{y}}(t)$ 为 $i = 2$ 时满足 (4.267) 第二个条件的退化解, 即 $\overset{(2)}{\overline{y}}(1) = 0$. 假设曲线 $y = \overset{(1)}{\overline{y}}(t)$ 和

[1] 在工作 [61,14] 中研究过这样的转移.

$y = \overset{(2)}{y}(t)$ 在某点 t_0 相交, 而且 $0 < t_0 < 1$; 又设

$$F_z(\overset{(1)}{\varphi}(\overset{(1)}{y}(t),t),\overset{(1)}{y}(t),t) > 0, \quad F_z(\overset{(2)}{\varphi}(\overset{(2)}{y}(t),t),\overset{(2)}{y}(t),t) < 0, \tag{4.268}$$

亦即沿着 $\overset{(1)}{y}(t)$, 根 $\overset{(1)}{\varphi}(y,t)$ 是左稳定的, 而沿着 $\overset{(2)}{y}(t)$, 根 $\overset{(2)}{\varphi}(y,t)$ 是右稳定的.

以 $\overline{y}(t)$ 记如下的折线:

$$\overline{y}(t) = \begin{cases} \overset{(1)}{y}(t), & \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ \overset{(2)}{y}(t), & \text{当 } t_0 \leqslant t \leqslant 1; \end{cases} \tag{4.269}$$

由此不难相信有如下推断: 方程组 (4.266) 存在着其变量 y 以折线 (4.269) 为极限的解, 而且这个解近似地满足条件 (4.267). 实际上, 我们来考虑 (4.266) 在 $t = t_0$ 满足初始条件

$$y(t_0,\mu) = y^0, \qquad z(t_0,\mu) = z^0, \tag{4.270}$$

的初值问题, 这里 y^0 为已知, 即为 $\overset{(1)}{y}(t_0) = \overset{(2)}{y}(t_0)$ 而 z^0 为区间 $\left(\overset{(1)}{\varphi}(y^0,t_0), \overset{(2)}{\varphi}(y^0,t_0)\right)$ 中的任一数. 假设在这个区间中不再有附加方程组 $\dfrac{d\tilde{z}}{d\tau} = F(\tilde{z},y^0,t_0)$ 的任何其他奇点, 那么由 §7 即知, 问题 (4.266), (4.270) 解的分量 $y(t,\mu)$ 当 $\mu \to 0$ 时从 t_0 向左是以 $\overset{(1)}{y}(t)$ 为极限, 而从 t_0 向右是以 $\overset{(2)}{y}(t)$ 为极限. 因为 $\overline{y}(t)$ 满足 (4.267), 所以 $y(t,\mu)$ 当 μ 充分小时在点 $t = 0$ 和 $t = 1$ 将接近于零. 因此, 我们就得到边值问题 (4.266), (4.267) 的近似解. 这时 z^0 在很大程度上是任意的. 根据这些设想, 我们自然希望能够找到初值问题 (4.266), (4.270) 精确地满足条件 (4.267) 的解, 下面就比 (4.266), (4.267) 更为一般的情形所进行的论证证实了我们上面的设想.

从上面的讨论可以看出, 所论问题的边界层不在区间 [0, 1] 的端点附近, 而是在这个区间某个内点 t_0 的邻域, 这就是所论问题所特有的奇异性, 所以这种边界层又称为*内部边界层*.

值得注意的是对于问题 (4.266), (4.267), 一般来说并不存在像 §13 中所描述那种类型的解. 实际上这时方程组 (4.16) 变成 $y_0 = 0$, $\overline{y}_0(1, y_0) = 0$; 显然其中并不含有 z_0, 因此我们得到了只含有一个未知量 y_0 的两个方程, 而这两个方程可以是不相容的, 亦即 $y_0 = 0$ 可以不满足另一个方程.

我们现在转到对更一般形式的方程组进行系统地研究存在内部层解的问题, 而关于 (4.266) 的结果可以作为这种情形的特例推出.

我们考虑方程组 (向量 z 和 y 暂时还是任意维数 M 和 m) :

$$\mu\frac{dz}{dt} = F(z,y,t), \quad \frac{dy}{dt} = f(z,y,t); \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{4.271}$$

及边界条件

$$R(x(0,\mu),x(1,\mu))=0; \tag{4.272}$$

这里 R 为 $(M+m)$ 维向量函数. 这也是在 §13 中考虑过的问题, 但在此将对它构造具有另外渐近性质、即具有内部层的解. 在讨论过程中必须对 (4.271) 右端加上适当的条件, 我们将像前面那样对所加条件编上号码 I, II, $\cdots$.

I. 假设方程组 $F(z,y,t)=0$ 有两组根 $z=\overset{(1)}{\varphi}(y,t)$ 和 $z=\overset{(2)}{\varphi}(y,t)$, 其中每一组都在自变量空间 (y,t) 中有一个相应的定义域 $\overset{(i)}{D}$, $i=1,2$.

我们将仿照 §13 的办法研究问题 (4.271), (4.272). 首先, 将 (4.271) 的某个辅助定解问题解的渐近表达式代入 (4.272). 根据所设想解的类型, 我们考虑这个辅助定解问题为在区间 [0, 1] 某个内点 t_0 (暂时未知) 的初值问题 (在 §13 中初始点为 $t=0$),

$$x(t_0,\mu)=x_0+\mu x_1+\cdots+\mu^k x_k+\cdots, \tag{4.273}$$

这里的 x_k 暂时为未知参数.

我们将求初值问题 (4.271), (4.273) 具有如下形式的渐近解 (见 §9) :

$$x(t,\mu)=\overset{(1)}{\bar{x}}(t,\mu)+\overset{(1)}{Q}x(\tau,\mu),\quad 当\ 0\leqslant t\leqslant t_0, \tag{4.274}$$

$$x(t,\mu)=\overset{(2)}{\bar{x}}(t,\mu)+\overset{(2)}{\Pi}x(\tau,\mu),\quad 当\ t_0\leqslant t\leqslant 1. \tag{4.275}$$

根据 §11 中第 2 段的记号, 其中符号 Q 表示在区间 $0\leqslant t\leqslant t_0$ 右端点附近的边界层项, 而 Π 表示在区间 $t_0\leqslant t\leqslant 1$ 左端点附近的边界层项, $\tau=\dfrac{t-t_0}{\mu}$. 当在区间 $[0,\ t_0]$ 上进行渐近构造时, 我们利用根 $\overset{(1)}{\varphi}(y,t)$, 而在 $[t_0,\ 1]$ 上利用根 $\overset{(2)}{\varphi}(y,t)$.

关于 $\overset{(i)}{\bar{x}}_0(t)$ 的方程和初始条件为

$$\frac{d\overset{(i)}{\bar{y}}_0}{dt}=f(\overset{(i)}{\bar{z}}_0,\overset{(i)}{\bar{y}}_0,t),\quad \overset{(i)}{\bar{z}}_0=\overset{(i)}{\varphi}_0(\overset{(i)}{\bar{y}}_0,t),\quad i=1,2, \tag{4.276}$$

$$\overset{(1)}{\bar{y}}_0(t_0)=y_0,\quad \overset{(2)}{\bar{y}}_0(t_0)=y_0; \tag{4.277}$$

我们假设这两组初值问题在它们相应的区间上当 y_0,t_0 在其某个变化区域中任意取值时都有解.

为了确定 y_0 和 t_0, 我们利用条件 (4.272). 将展开式 (4.274), (4.275) 代入 (4.272) 即得

$$R(\overset{(1)}{\bar{x}}_0(0)+\mu\overset{(1)}{\bar{x}}_1(0)+\cdots,\ \overset{(2)}{\bar{x}}_0(1)+\mu\overset{(2)}{\bar{x}}_1(1)+\cdots)=R_0+\mu R_1+\cdots=0 \tag{4.278}$$

(在点 $t=0$ 和 $t=1$ 处, 边界层项都是指数式趋于零的小量, 因此我们将其略去) . 由 (4.278) 的零次近似即得

$$R_0 \equiv R\left(\overset{(1)}{\overline{x}}_0(0),\ \overset{(2)}{\overline{x}}_0(1)\right)=0. \tag{4.279}$$

在这个方程组中, 未知量为 y_0 和 t_0, 这是因为 $\overset{(i)}{\overline{y}}_0(t)$ 和 $\overset{(i)}{\overline{z}}_0(t)=\overset{(i)}{\varphi}(\overset{(i)}{\overline{y}}_0(t),t)$ 都依赖于作为初值点的 y_0 和 t_0, 于是由 $(M+m)$ 个方程式组成的 (4.279) 有 (m+1) 个未知量 y_0 和 t_0; 所以方程组 (4.279) 一般来说是超定的, 为了使得这个方程组可解, 我们假设:

II. 假设 z 为数值函数, 即 $M=1$.

由于假设 II, 在方程组 (4.279) 中的未知量的个数正好等于方程的个数.

III. 假设方程组 (4.279) 有解 $y_0=y_0^0,\ t_0=t_0^0$, 而且 $0<t_0^0<1$, $(y_0^0,t_0^0)\in\overset{(1)}{D}\cap\overset{(2)}{D}$, 此外还设对应的函数行列式

$$\left.\frac{D(R_0)}{D(y_0,t_0)}\right|_{\substack{y_0=y_0^0\\ t_0=t_0^0}}\equiv\Delta_0^0\neq 0. \tag{4.280}$$

确定了 y_0^0, t_0^0 之后, 我们就完全确定了展开式 (4.274), (4.275) 中的项 $\overset{(i)}{\overline{x}}_0(t)$.

IV. 假设当 $0\leqslant t\leqslant t_0^0$ 时有 $(\overset{(1)}{\overline{y}}_0(t),t)\in\overset{(1)}{D}$, 而当 $t_0^0\leqslant t\leqslant 1$ 时有 $(\overset{(2)}{\overline{y}}_0(t),t)\in\overset{(2)}{D}$.

V. 假设

$$\begin{cases} F_z(\overset{(1)}{\varphi}(\overset{(1)}{\overline{y}}_0(t),t),\overset{(1)}{\overline{y}}_0(t),t)>0, & 0\leqslant t\leqslant t_0^0,\\ F_z(\overset{(2)}{\varphi}(\overset{(2)}{\overline{y}}_0(t),t),\overset{(2)}{\overline{y}}_0(t),t)<0, & t_0^0\leqslant t\leqslant 1\end{cases} \tag{4.281}$$

(参看 (4.268)).

我们现在转到边界层项 $\overset{(2)}{\Pi}_0 x(\tau)$, $\overset{(1)}{Q}_0 x(\tau)$ 的讨论. 像通常那样有

$$\overset{(1)}{Q}_0 y(\tau)=\overset{(2)}{\Pi}_0 y(\tau)\equiv 0; \tag{4.282}$$

而 $\overset{(1)}{Q}_0 z(\tau)$ 和 $\overset{(2)}{\Pi}_0 z(\tau)$ 满足如下方程和初始条件:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overset{(1)}{Q}_0 z}{d\tau}=F(\overset{(1)}{\varphi}(y_0^0,t_0^0)+\overset{(1)}{Q}_0 z,\ y_0^0,\ t_0^0), \quad \tau=\dfrac{t-t_0^0}{\mu}\leqslant 0,\\ \overset{(1)}{Q}_0 z(0)=z_0-\overset{(1)}{\varphi}(y_0^0,t_0^0);\end{cases} \tag{4.283}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d \overset{(2)}{\Pi}_0 z}{d\tau} = F(\overset{(2)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0) + \overset{(2)}{\Pi}_0 z, y_0^0, t_0^0), \quad \tau = \dfrac{t - t_0^0}{\mu} \geqslant 0, \\ \overset{(2)}{\Pi}_0 z(0) = z_0 - \overset{(2)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0). \end{cases} \tag{4.284}$$

如果在 (4.283) 中进行变量替换 $\widetilde{z} = \overset{(1)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0) + \overset{(1)}{Q}_0 z(\tau)$, 而在 (4.284) 中进行变量替换 $\widetilde{z} = \overset{(2)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0) + \overset{(2)}{\Pi}_0 z(\tau)$ 那么对于这两种情况都得到同一方程组和同一初始条件:

$$\frac{d\widetilde{z}}{d\tau} = F(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0), \tag{4.285}$$

$$\widetilde{z}(0) = z_0; \tag{4.286}$$

这是关于点 (y_0^0, t_0^0) 的附加方程组 (见 (2.23)). 在此我们认为 y_0^0 和 t_0^0 已经确定, 而 z_0 暂时还不知道.

像通常那样, 我们还要求 $\overset{(1)}{Q}_0 z(\tau)$ 和 $\overset{(2)}{\Pi}_0 z(\tau)$ 满足条件: 当 $\tau \to -\infty$ 时有 $\overset{(1)}{Q}_0 z(\tau) \to 0$, 而当 $\tau \to \infty$ 时有 $\overset{(2)}{\Pi}_0 z(\tau) \to 0$. 对于 $\widetilde{z}(\tau)$ 来说, 这就意味着当 $\tau \to -\infty$ 时, $\widetilde{z}(\tau) \to \overset{(1)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0)$, 而当 $\tau \to \infty$ 时, $\widetilde{z}(\tau) \to \overset{(2)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0)$. 由此即可得出, z_0 应当属于当 $\tau \to -\infty$ 时以 $\overset{(1)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0)$ 为渐近稳定奇点的影响域, 同样 z_0 也应当属于当 $\tau \to \infty$ 时以 $\overset{(2)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0)$ 为渐近稳定奇点的影响域. 关于方程组 (4.285) 当 $\tau \to -\infty$ 时以 $\overset{(1)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0)$ 为渐近稳定奇点、而当 $\tau \to \infty$ 时以 $\overset{(2)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0)$ 为渐近稳定奇点的结论, 都是直接由条件V推出来的. 由于 z 为数值函数, 所以上述条件可以更简单地说成: z_0 应位于区间 $(\overset{(1)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0), \overset{(2)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0))$ 之中 (见 §7 第 5 段) .

为了决定 z_0, 需要研究项 $\overline{x}_{(i)}(t)$, 它满足下列方程组和初始条件:

$$\begin{cases} \dfrac{d \overset{(i)}{\overline{z}}_0}{dt} = \overset{(i)}{\overline{F}}_z(t) \overset{(i)}{\overline{z}}_1 + \overset{(i)}{\overline{F}}_y(t) \overset{(i)}{\overline{y}}_1, \\ \dfrac{d \overset{(i)}{\overline{y}}_1}{dt} = \overset{(i)}{\overline{f}}_z(t) \overset{(i)}{\overline{z}}_1 + \overset{(i)}{\overline{f}}_y(t) \overset{(i)}{\overline{y}}_1; \end{cases} \tag{4.287}$$

$$\overset{(1)}{\overline{y}}_1(t_0^0) = y_1 + \int_0^{-\infty} \overset{(1)}{Q}_0 f(\tau) d\tau, \tag{4.288}$$

$$\overset{(2)}{\overline{y}}_1(t_0^0) = y_1 + \int_0^{\infty} \overset{(2)}{\Pi}_0 f(\tau) d\tau, \tag{4.289}$$

其中 $\overset{(i)}{\overline{F}}_z(t) \equiv F_z(\overset{(i)}{\overline{z}}_0(t), \overset{(i)}{\overline{y}}_0(t), t)$, 而 $\overset{(i)}{\overline{F}}_y(t)$, $\overset{(i)}{\overline{f}}_z(t)$, $\overset{(i)}{\overline{f}}_y(t)$ 有类似的意义. 由此即可确定 $\overset{(i)}{\overline{y}}_1(t)$ 和 $\overset{(i)}{\overline{z}}_1(t)$. 并且显然它们是通过条件 (4.288), (4.289) 而依赖于未知参

数 y_1 和依赖于含在 $\overset{(1)}{Q}_0 f(\tau)$ 与 $\overset{(2)}{\Pi}_0 f(\tau)$ 中的未知参数 z_0; 为了从 (4.278) 决定这些参数, 我们有方程组 $R_1 = 0$, 或者详细些写成

$$R_1^0 \overset{(1)}{\bar{x}}_1(0) + R_2^0 \overset{(2)}{\bar{x}}_1(1) = 0 \tag{4.290}$$

(记号 R_1^0 和 R_2^0 与在 §13 中所用的类似). 因为从 (4.287) ~ (4.289) 知道 $\overset{(i)}{\bar{x}}_1(t)$ 是 y_1 和 z_0 的函数, 所以 (4.290) 是关于 $(m+1)$ 个未知量 y_1, z_0 的 $(m+1)$ 个方程组.

VI. 假设 (4.290) 有解 $y_1 = y_1^0, z_0 = z_0^0$, 而且 z_0^0 是位于区间 $(\overset{(1)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0), \overset{(2)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0))$ 之中.

下面我们来比较方程组 $R_0 = 0$ 关于变量 y_0, t_0 的函数行列式与方程组 $R_1 = 0$ 关于变量 y_1, z_0 的函数行列式. 首先有 (与 §14 不同, 这里我们用第二个下标表示 R_0, y_0 和 R_1, y_1 的分量号码)

$$\frac{\partial(R_0)}{\partial(y_0, t_0)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial R_{01}}{\partial y_{01}} & \cdots & \dfrac{\partial R_{01}}{\partial y_{0m}} & \dfrac{\partial R_{01}}{\partial t_0} \\ \dfrac{\partial R_{02}}{\partial y_{01}} & \cdots & \dfrac{\partial R_{02}}{\partial y_{0m}} & \dfrac{\partial R_{02}}{\partial t_0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial R_{0,m+1}}{\partial y_{01}} & \cdots & \dfrac{\partial R_{0,m+1}}{\partial y_{0m}} & \dfrac{\partial R_{0,m+1}}{\partial t_0} \end{vmatrix}, \tag{4.291}$$

$$\frac{\partial(R_1)}{\partial(y_1, z_0)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial R_{11}}{\partial y_{11}} & \cdots & \dfrac{\partial R_{11}}{\partial y_{1m}} & \dfrac{\partial R_{11}}{\partial z_0} \\ \dfrac{\partial R_{12}}{\partial y_{11}} & \cdots & \dfrac{\partial R_{12}}{\partial y_{1m}} & \dfrac{\partial R_{12}}{\partial z_0} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial R_{1,m+1}}{\partial y_{11}} & \cdots & \dfrac{\partial R_{1,m+1}}{\partial y_{1m}} & \dfrac{\partial R_{1,m+1}}{\partial z_0} \end{vmatrix}; \tag{4.292}$$

其中每个偏导数都要进行复合函数求导, 亦即

$$\frac{\partial R_{0j}}{\partial y_{0l}} = \frac{\partial R_{0j}}{\partial \overset{(1)}{\bar{x}}_{0k}(0)} \frac{\partial \overset{(1)}{\bar{x}}_{0k}(0)}{\partial \overset{(1)}{\bar{y}}_{0s}(t_0)} \frac{\partial \overset{(1)}{\bar{y}}_{0s}(t_0)}{\partial y_{0l}} + \frac{\partial R_{0j}}{\partial \overset{(2)}{\bar{x}}_{0k}(1)} \frac{\partial \overset{(2)}{\bar{x}}_{0k}(1)}{\partial \overset{(2)}{\bar{y}}_{0s}(t_0)} \frac{\partial \overset{(2)}{\bar{y}}_{0s}(t_0)}{\partial y_{0l}}, \tag{4.293}$$

$$\frac{\partial R_{1j}}{\partial y_{1l}} = \frac{\partial R_{1j}}{\partial \overset{(1)}{\bar{x}}_{1k}(0)} \frac{\partial \overset{(1)}{\bar{x}}_{1k}(0)}{\partial \overset{(1)}{\bar{y}}_{1s}(t_0^0)} \frac{\partial \overset{(1)}{\bar{y}}_{1s}(t_0^0)}{\partial y_{1l}} + \frac{\partial R_{1j}}{\partial \overset{(2)}{\bar{x}}_{1k}(1)} \frac{\partial \overset{(2)}{\bar{x}}_{1k}(1)}{\partial \overset{(2)}{\bar{y}}_{1s}(t_0^0)} \frac{\partial \overset{(2)}{\bar{y}}_{1s}(t_0^0)}{\partial y_{1l}}, \tag{4.294}$$

$$\frac{\partial R_{0j}}{\partial t_0}=\frac{\partial R_{0j}}{\partial \overset{(1)}{\overline{x}}_{0k}(0)}\frac{\partial \overset{(1)}{\overline{x}}_{0k}(0)}{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_{0s}(t_0)}\frac{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_{0s}(t_0)}{\partial t_0}+\frac{\partial R_{0j}}{\partial \overset{(2)}{\overline{x}}_{0k}(1)}\frac{\partial \overset{(2)}{\overline{x}}_{0k}(1)}{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_{0s}(t_0)}\frac{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_{0s}(t_0)}{\partial t_0}, \tag{4.295}$$

$$\frac{\partial R_{1j}}{\partial z_0}=\frac{\partial R_{1j}}{\partial \overset{(1)}{\overline{x}}_{1k}(0)}\frac{\partial \overset{(1)}{\overline{x}}_{1k}(0)}{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_{1s}(t_0^0)}\frac{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_{1s}(t_0^0)}{\partial z_0}+\frac{\partial R_{1j}}{\partial \overset{(2)}{\overline{x}}_{1k}(1)}\frac{\partial \overset{(2)}{\overline{x}}_{1k}(1)}{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_{1s}(t_0^0)}\frac{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_{1s}(t_0^0)}{\partial z_0}, \tag{4.296}$$

(其中 k 和 s 为哑指数, 即在 (4.293) $\sim$ (4.296) 中都是对 k 和 s 求和) .

我们来证明, 在 (4.293) 中当 $y_0=y_0^0$, $t_0=t_0^0$ 时 (这时我们用上标 0 表示) 与 (4.294) 中对应的导数相等. 首先从方程组 $R_1=0$ 或者 (4.290) 就是 (4.279) 的变分方程组即得等式

$$\left(\frac{\partial R_{0j}}{\partial \overset{(1)}{\overline{x}}_{0k}(0)}\right)^0=\frac{\partial R_{1j}}{\partial \overset{(1)}{\overline{x}}_{1k}(0)},\quad \left(\frac{\partial R_{0j}}{\partial \overset{(2)}{\overline{x}}_{0k}(1)}\right)^0=\frac{\partial R_{1j}}{\partial \overset{(2)}{\overline{x}}_{1k}(1)}; \tag{4.297}$$

其次, 如果把 (4.276) 中的第二个方程写成 $F(\overset{(i)}{z}_0,\overset{(i)}{\overline{y}}_0,t)=0$ 的形式, 则可看出导函数 $\dfrac{\partial \overset{(i)}{\overline{x}}_{0k}(t)}{\partial \overset{(i)}{\overline{y}}_{0s}(t_0)}$, $i=1,2$, 正好满足与 (4.287) 的齐次方程组完全一样的线性齐次方程组及初始条件

$$\left.\frac{\partial \overset{(i)}{\overline{y}}_{0k}(t)}{\partial \overset{(i)}{\overline{y}}_{0s}(t_0)}\right|_{t=t_0}=\delta_{ks}, \tag{4.298}$$

这里 δ_{ks} 为 Kronecker 符号. 另一方面, 由于 (4.287) 的线性性, 因此关于 $\dfrac{\partial \overset{(i)}{\overline{x}}_{1k}(t)}{\partial \overset{(i)}{\overline{y}}_{1s}(t_0^0)}$ 的方程组也是与 (4.287) 的齐次方程组一样, 且其初始条件为

$$\left.\frac{\partial \overset{(i)}{\overline{y}}_{1k}(t)}{\partial \overset{(i)}{\overline{y}}_{1s}(t_0^0)}\right|_{t=t_0^0}=\delta_{ks}, \tag{4.299}$$

亦即与 (4.298) 一致. 有此即得等式

$$\left(\frac{\partial \overset{(1)}{\overline{x}}_{0k}(0)}{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_{0s}(t_0)}\right)^0=\frac{\partial \overset{(1)}{\overline{x}}_{1k}(0)}{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_{1s}(t_0^0)},\quad \left(\frac{\partial \overset{(2)}{\overline{x}}_{0k}(1)}{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_{0s}(t_0)}\right)^0=\frac{\partial \overset{(2)}{\overline{x}}_{1k}(1)}{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_{1s}(t_0^0)}. \tag{4.300}$$

最后, 由 (4.277), (4.288), (4.289), 显然有导数等式

$$\left(\frac{\partial \overset{(i)}{\overline{y}}_{0s}(t_0)}{\partial y_{0l}}\right)^0=\frac{\partial \overset{(i)}{\overline{y}}_{1s}(t_0^0)}{\partial y_{1l}}=\delta_{sl}. \tag{4.301}$$

总之, 当 (4.293) 中的 $y_0 = y_0^0, t_0 = t_0^0$ 时, 它与 (4.294) 完全一样.

为了把 (4.296) 与当 $y_0 = y_0^0, t_0 = t_0^0$ 时的 (4.295) 进行比较, 我们还必须比较 $\left(\dfrac{\partial \overset{(i)}{\bar{y}}_{0s}(t_0)}{\partial t_0}\right)^0$ 与 $\dfrac{\partial \overset{(i)}{\bar{y}}_{1s}(t_0^0)}{\partial z_0}$, 我们有

$$\left(\frac{\partial \overset{(i)}{\bar{y}}_{0s}(t_0)}{\partial t_0}\right)^0 = -f_s(\overset{(i)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0), y_0^0, t_0^0). \tag{4.302}$$

为了计算 $\dfrac{\partial \overset{(i)}{\bar{y}}_{1s}(t_0^0)}{\partial z_0}$, 我们利用 (4.285) 将 (4.288) 和 (4.289) 中积分项的积分变量变成 $\widetilde{z}$:

$$\int_0^{-\infty} \overset{(1)}{Q}_0 f(\tau)d\tau = \int_{z_0}^{\overset{(1)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0)} \frac{f(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0) - f(\overset{(1)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0), y_0^0, t_0^0)}{F(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0)} d\widetilde{z}, \tag{4.303}$$

$$\int_0^{\infty} \overset{(2)}{\Pi}_0 f(\tau)d\tau = \int_{z_0}^{\overset{(2)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0)} \frac{f(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0) - f(\overset{(2)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0), y_0^0, t_0^0)}{F(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0)} d\widetilde{z};$$

由此即得

$$\frac{\partial \overset{(i)}{\bar{y}}_{1s}(t_0^0)}{\partial z_0} = \frac{f_s(\overset{(i)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0), y_0^0, t_0^0) - f_s(z_0, y_0^0, t_0^0)}{F(z_0, y_0^0, t_0^0)}, \tag{4.304}$$

此式与 (4.302) 并不相同, 但它可分成两项相加; 其中第二项, 即 $-\dfrac{f_s(z_0, y_0^0, t_0^0)}{F(z_0, y_0^0, t_0^0)}$, 它与 i 无关. 当把 (4.304) 代入 (4.296) 时, 这个第二项就给出

$$-\left(\frac{\partial R_{1j}}{\partial \overset{(1)}{\bar{x}}_{1k}(0)} \frac{\partial \overset{(1)}{\bar{x}}_{1k}(0)}{\partial \overset{(1)}{\bar{y}}_{1s}(t_0^0)} + \frac{\partial R_{1j}}{\partial \overset{(2)}{\bar{x}}_{1k}(1)} \frac{\partial \overset{(2)}{\bar{x}}_{1k}(1)}{\partial \overset{(2)}{\bar{y}}_{1s}(t_0^0)}\right) \frac{f_s(z_0, y_0^0, t_0^0)}{F(z_0, y_0^0, t_0^0)}. \tag{4.305}$$

因而由 (4.301) 即知 (4.294) 可以写成

$$\frac{\partial R_{1j}}{\partial y_{1l}} = \frac{\partial R_{1j}}{\partial \overset{(1)}{\bar{x}}_{1k}(0)} \frac{\partial \overset{(1)}{\bar{x}}_{1k}(0)}{\partial \overset{(1)}{\bar{y}}_{1l}(t_0^0)} + \frac{\partial R_{1j}}{\partial \overset{(2)}{\bar{x}}_{1k}(1)} \frac{\partial \overset{(2)}{\bar{x}}_{1k}(1)}{\partial \overset{(2)}{\bar{y}}_{1l}(t_0^0)}; \tag{4.306}$$

将 (4.305) 和 (4.306) 分别代替 (4.292) 中的 $\dfrac{\partial R_{1j}}{\partial y_{1l}}$ 和 $\dfrac{\partial R_{1j}}{\partial z_0}$, 于是即得一个最后一列为前面各列线性组合的行列式, 亦即此行列式等于零; 因此当计算 (4.292) 的值时, 只须利用 (4.304) 的第一项, 即

$$\frac{f_s(\overset{(i)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0), y_0^0, t_0^0)}{F(z_0, y_0^0, t_0^0)}; \tag{4.307}$$

而这与 (4.302) 的差别只在于因子 $-\dfrac{1}{F(z_0,y_0^0,t_0^0)}$. 所以整个行列式 (4.292) 与(4.291) 不同的也是这同一个因子.

总之, 方程组 $R_1=0$ 关于 y_1,z_0 的函数行列式 $\dfrac{D(R_1)}{D(y_1,z_0)}$ 在点 y_1^0,z_0^0 处的值与 Δ_0^0 (见 (4.280)) 之间的差别只在于因子 $-\dfrac{1}{F(z_0,y_0^0,t_0^0)}$, 而且由于条件VI即知 $F(z_0,y_0^0,t_0^0)\neq 0$ (z_0^0 位于方程 $F(z,y_0^0,t_0^0)=0$ 的根 $\overset{(1)}{\varphi}(y_0^0,t_0^0)$ 与 $\overset{(2)}{\varphi}(y_0^0,t_0^0)$ 之间). 由此得出 $\dfrac{D(R_1)}{D(y_1,z_0)}$ 在点 y_1^0,z_0^0 处不为零.

注　可以证明, 对于特殊情形 (4.266), (4.267), 条件 VI 成为多余的, 因为它可直接由条件 III 推出.

我们继续构造展开式 (4.274), (4.275). 决定了 z_0^0 之后, 可以认为完全构造了 $\widetilde{z}(\tau)$, 以及边界层项 $\overset{(1)}{Q}_0\, z(\tau)$ 和 $\overset{(2)}{\Pi}_0\, z(\tau)$. 因此在 (4.274) 和 (4.275) 中所有零次近似项都构造出来了. 由于 y_1^0 已经求出, 因此项 $\overset{(i)}{x}_1\,(t)$, $i=1,2$, 也可以认为已经构造出来了.

边界层项 $\overset{(1)}{Q}_1\; z(\tau)$ 和 $\overset{(2)}{\Pi}_1\; z(\tau)$ 含有未知参数 z_1. 为了确定它, 我们考虑关于 $\overset{(i)}{x}_2\,(t)$, $i=1,2$, 的方程组, 并将这个解代入方程组 $R_2=0$, 因为在此解中含有 y_2 和 z_1. 对于任意的 k, 同样应用类似的方法从方程组 $R_{k+1}=0$ 确定 z_k 和 y_{k+1}, $k=1,2,\cdots$. 其中应代入定解问题

$$\frac{d\overset{(i)}{z}_k}{dt}=\overset{(i)}{F}_{k+1},\qquad \frac{\overset{(i)}{y}_{k+1}}{dt}=\overset{(i)}{f}_{k+1};\tag{4.308}$$

$$\overset{(1)}{y}_{k+1}\,(t_0^0)=y_{k+1}+\int_0^{-\infty}\overset{(1)}{Q}_k\,f(\tau)d\tau,\tag{4.309}$$

$$\overset{(2)}{y}_{k+1}\,(t_0^0)=y_{k+1}+\int_0^{\infty}Q\,\overset{(2)}{\Pi}_k\,f(\tau)d\tau,\tag{4.310}$$

的解 $\overset{(i)}{x}_{k+1}\,(t)$, $i=1,2$ (这与 (4.287) 不同的仅在已知的非齐次项) .

不难相信, 方程组 $R_{k+1}=0,k=1,2,\cdots$, 是关于 y_{k+1},z_k 的线性方程组, 其系数行列式与

$$\left.\frac{DR_1}{D(y_1,z_0)}\right|_{y_0=y_0^0,t_0=t_0^0,y_1=y_1^0,z_0=z_0^0}$$

完全一样. 这可以利用类似于上面比较 (4.291) 与 (4.292) 时的过程进行论证, 其中有点不同的是确定 (4.309), (4.310) 中积分项对 z_k 的依赖性. 例如我们来考虑积分 $\int_0^{-\infty}\overset{(1)}{Q}_k\,f(\tau)d\tau$. 函数 $\overset{(1)}{Q}_k\,f(\tau)$ (见展开式 (3.29) 并注意到在 §11 第 2 段中的讨论) 是 $\overset{(1)}{Q}_k\,z(\tau)$ 和 $\overset{(1)}{Q}_k\,y(\tau)$ 的线性表达式 $f_z(\widetilde{z},y_0^0,t_0^0)\,\overset{(1)}{Q}_k\,z(\tau)+f_y(\widetilde{z},y_0^0,t_0^0)\,\overset{(1)}{Q}_k\,y(\tau)$ 与依

赖于边界函数 $\overset{(1)}{Q}_i x(\tau)$, $i=0,1,\cdots,k-1$, 的项之和. 因为 $\overset{(1)}{Q}_k y(\tau) = -\int_\tau^{-\infty} \overset{(1)}{Q}_{k-1} \cdot f(\tau)d\tau$, 亦即 $\overset{(1)}{Q}_k y(\tau)$ 也是由下标小于号码 k 的边界函数所表示, 因此 $\overset{(1)}{Q}_k f(\tau)$ 对 z_k 的依赖性只限在上面写出的项 $f_z(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0) \overset{(1)}{Q}_k z(\tau)$. 我们考虑积分

$$\int_0^{-\infty} f_z(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0) \overset{(1)}{Q}_k z(\tau)d\tau. \tag{4.311}$$

其中函数 $\overset{(1)}{Q}_k z(\tau)$ 满足线性方程组 (见方程组 (3.82) 并注意到在 §11 第 2 段中的讨论)

$$\frac{d \overset{(1)}{Q}_k z}{d\tau} = F_z(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0) \overset{(1)}{Q}_k z + \widetilde{G}_k(\tau), \quad \tau \leqslant 0. \tag{4.312}$$

其中 $\widetilde{G}_k(\tau)$ 依赖于下标号码小于 k 的边界函数和 $\overset{(1)}{Q}_k y(\tau)$ 以及初始条件 (见 (3.80))

$$\overset{(1)}{Q}_k z(0) = z_k - \overset{(1)}{\widetilde{z}}_k (t_0),$$

这里 $\overset{(1)}{\widetilde{z}}_k (t_0)$ 从前面的计算已经知道. 由此得出, $\overset{(1)}{Q}_k z(\tau)$ 对 z_k 的依赖性是通过在方程组 (4.312) 解中的如下形式部分

$$z_k \exp\left(\int_0^\tau F_z(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0)ds\right),$$

来实现的, 利用 (4.285), 可将上式写成如下形式

$$\begin{aligned} z_k \exp\left(\int_0^\tau F_z(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0)ds\right) &= z_k \exp\left(\int_{z_0^0}^{\widetilde{z}} \frac{F_z(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0)}{F(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0)} d\widetilde{z}\right) \\ &= z_k \exp(\ln F(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0) - \ln F(z_0^0, y_0^0, t_0^0)) \\ &= z_k \frac{F(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0)}{F(z_0^0, y_0^0, t_0^0)}. \end{aligned} \tag{4.313}$$

利用 (4.313) 代替 (4.311) 中的 $\overset{(1)}{Q}_k z(\tau)$ 即得

$$\begin{aligned} z_k \int_0^{-\infty} f_z(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0) \frac{F(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0)}{F(z_0^0, y_0^0, t_0^0)} d\tau &= \frac{z_k}{F(z_0^0, y_0^0, t_0^0)} \int_{z_0^0}^{\overset{(1)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0)} f_z(\widetilde{z}, y_0^0, t_0^0) d\widetilde{z} \\ &= z_k \frac{f(\overset{(1)}{\varphi}(y_0^0, t_0^0), y_0^0, t_0^0) - f(z_0^0, y_0^0, t_0^0)}{F(z_0^0, y_0^0, t_0^0)}. \end{aligned}$$

由此即见 (4.309) 中的积分项是 z_k 的线性函数, 其系数与表达式 (4.304) 当 $i=1$ 时完全一样. 类似的结论对 (4.310) 和 (4.304) 当 $i=2$ 时也成立.

总之, 方程组 $R_{k+1}=0$ 关于 y_{k+1}, z_k 的可解性从前面的条件即可推出, 因为它的系数行列式与 Δ_0^0 只相差一个非本质的因子 $\left(-\dfrac{1}{F(z_0^0,y_0^0,t_0^0)}\right)$, 而 Δ_0^0 由(4.280) 知道不等于零. 至此可以认为已完成了对形式级数 (4.274), (4.275) 的构造.

我们用 $\overset{(i)}{X}_n(t,\mu)$, $i=1,2$, 表示级数 (4.274), (4.275) 的部分和, 并令

$$X_n(t,\mu)=\begin{cases}\overset{(1)}{X}_n(t,\mu), & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_0^0,\\ \overset{(2)}{X}_n(t,\mu), & \text{当 } t_0^0\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

我们引进由三条曲线段组成的曲线 L_0 如下:

$$L_{01}=\{\,(z,y,t):\, z=\overset{(1)}{\overline{z}}_0(t),\, y=\overset{(1)}{\overline{y}}_0(t),\, 0\leqslant t\leqslant t_0^0\,\},$$
$$L_{02}=\{\,(z,y,t):\, z=\widetilde{z}(\tau),\, -\infty<\tau<\infty;\; y=y_0^0,\, t=t_0^0\,\},$$
$$L_{03}=\{\,(z,y,t):\, z=\overset{(2)}{\overline{z}}_0(t),\, y=\overset{(2)}{\overline{y}}_0(t),\, t_0^0\leqslant t\leqslant 1\,\},$$

并把对 (4.271) 右端和 (4.272) 的函数 R 的光滑性条件与条件 I ~ VI 联合起来.

VII. *假设函数 $F(z,y,t)$ 和 $f(z,y,t)$ 在曲线 L_0 的某个 δ-管中有直到包括 $(n+2)$ 阶在内的连续偏导数, 而 $R(x(0,\mu),x(1,\mu))$ 在点 $(\overset{(1)}{\overline{x}}_0(0,y_0^0,t_0^0),\ \overset{(2)}{\overline{x}}_0(1,y_0^0,t_0^0))$ 的邻域中也有直到包括 $(n+2)$ 阶在内的连续偏导数.*

定理 4.3 *当满足条件 I ~ VII 时, 存在常数 $\mu_0>0$, δ_0 和 $c>0$, 使得当 $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时, 在曲线 L_0 的 δ-管中存在问题 (4.271), (4.272) 的唯一解 $X(t,\mu)$, 且对 $0\leqslant t\leqslant 1$ 满足不等式*

$$\|X(t,\mu)-X_n(t,\mu)\|\leqslant c\,\mu^{n+1}. \tag{4.314}$$

注 1. 如果只考虑解的存在性和唯一性, 那么在条件 VII 中只需假设 $n=0$.

2. 由 (4.314) 得出, 解的 y 分量的极限曲线是由两段折线组成的:

$$\lim_{\mu\to 0}Y(t,\mu)=\overline{y}_0(t)\equiv\begin{cases}\overset{(1)}{\overline{y}}_0(t), \text{ 当 } 0\leqslant t\leqslant t_0^0,\\ \overset{(2)}{\overline{y}}_0(t), \text{ 当 } t_0^0\leqslant t\leqslant 1,\end{cases}$$

而 $Z(t,\mu)$ 的极限函数在点 t_0^0 处有第一类型的间断.

3. 为了得到所论类型的解, 方程组 (4.271) 的第一个方程右端, 关于 z 本质上应当是非线性的 (方程 $F(z,y,t)=0$ 关于 z 应当至少有两个根) .

4. 这里所考虑的解与 §13 中所描述的解可能同时存在.

5. 当把定理 4.3 应用于具体方程组时, 自然会产生如何从方程 $F(z,y,t)=0$ 的根中选取 $\overset{(1)}{\varphi}(y,t)$ 和 $\overset{(2)}{\varphi}(y,t)$ 的问题. 按照所考虑的构造, 对于这个问题的回答, 莫过于直接验证条件 (4.281). 然而往往是两个根在 (y,t) 的同一个变化区域 D 都有意义, 其中对一个根有 $F_z(\varphi(y,t),y,t)>0$, 而对另一个根有 $F_z(\varphi(y,t)\ ,y,t)<0$ (显然点 (y_0^0,t_0^0) 的某个邻域就是这种区域), 那么自然是取第一个根为 $\overset{(1)}{\varphi}(y,t)$, 而第二个根为 $\overset{(2)}{\varphi}(y,t)$.

证明 定理 4.3 的证明可以沿着 §13 中证明定理 4.1 的路线进行, 把 R 看成当 $t=t_0^0$ 时初值 x^0 的函数. 但是, 不同于 (4.27), 对 $\Delta=D(R)/D(x^0)$ 的渐近表示现在是从 μ 阶项开始的, 不过这并不妨碍像在 §13 那样继续进行论证, 只是应当用点 $(y_0^0+\mu y_1^0, z_0^0)$ 代替 §13 中证明解的存在性时所用的点 x_0^0. □

练习 详细证明定理 4.3.

最后, 我们举一个具有上述类型解的方程组例子:

$$\mu\frac{dz}{dt}=1-z^2,\quad \frac{dy}{dt}=z;\quad y(0,\mu)=0,\quad y(1,\mu)=0; \tag{4.315}$$

这时按照上述法则所构造的 $\overline{y}_0(t)$ 为 $(t_0^0=\frac{1}{2})$

$$\overline{y}_0(t)=\begin{cases}-t, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2},\\ t-1, & \text{当 } \frac{1}{2}\leqslant t\leqslant 1\end{cases} \tag{4.316}$$

将此与精确解公式 (不难对方程组 (4.315) 进行求积得到)

$$Y(t,\mu)=\mu\ln\frac{\exp(-t/\mu)+\exp(-(1-t)/\mu)}{1+\exp(-1/\mu)} \tag{4.317}$$

比较, 不难确信, (4.316) 实际上是 (4.317) 当 $\mu\to 0$ 时的极限函数, 亦即

$$\lim_{\mu\to 0}Y(t,\mu)=\overline{y}_0(t),\quad \text{当 } 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{4.318}$$

练习 利用适当的计算, 对等式 (4.316) ~ (4.318) 进行验证.

3. 当存在两个以上的根时, 从一个根到另一个右稳定性比较强的根的转移①

有关条件稳定根的研究给出了处理比上一段的描述更为一般情况的可能性, 即在几个 (对于一个) 点出现内部层的问题. 这时解的 y 分量的极限函数是由几段 (多于两段) 曲线组成的折线, 而 z 分量的极限函数在对应于折线 y 的角点的 t 值上有第一类间断.

我们下面只就方程组

$$\mu\frac{dz}{dt}=F(z,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=z;\quad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{4.319}$$

进行讨论, 其中向量 z 和 y 均为二维; 这显然与两个二阶方程式

$$\mu\frac{d^2y}{dt^2}=F(\frac{dy}{dt},y,t)$$

①在 [58] 中研究过这样的转移.

是等价的. 这时的边界条件为

$$y(0,\mu)=0,\quad y(1,\mu)=0. \tag{4.320}$$

在下面的讨论中, 我们将对 $F(z,y,t)$ 加上某些条件, 它们将像前面一样编上号码 I, II, $\cdots$. 此外, 由于同上一段情况的明显类似, 我们将略掉其中某些细节.

I. 假设方程组 $F(z,y,t)=0$ 有三个根 $z=\overset{(i)}{\varphi}(y,t), i=1,2,3$, 其中每一个都在变量 (y,t) 空间的相应区域 $\overset{(i)}{D}$ 中有定义.

由于现在考虑的问题是上一段所研究情况的自然推广, 因此, 我们先验地假设 y 的极限函数在暂时未知的点 t_1,t_2 $(0<t_1<t_2<1)$ 处有角点 (三段曲线组成的折线), 亦即在这两个点出现内部层. 于是在区间 $[0,t_1]$ 上, 我们将利用根 $\overset{(1)}{\varphi}(y,t)$ 来构造渐近解, 其边界层出现在右端点上, 从而根 $\overset{(1)}{\varphi}(y,t)$ 应为左稳定的. 完全一样, 在区间 $[t_2,1]$ 上所使用的根 $\overset{(3)}{\varphi}(y,t)$ 应当是右稳定的, 而在区间 $[t_1,t_2]$ 上使用根 $\overset{(2)}{\varphi}(y,t)$, 它的两个端点都出现边界层, 因而根 $\overset{(2)}{\varphi}(y,t)$ 应当是条件稳定的. 下面我们将对这些条件进行更确切地陈述.

像在上一段那样, 我们首先考虑 (4.319) 的辅助定解问题, 其渐近解将用来代入边界条件 (4.320); 而根据上面对解所假设的类型, 我们利用在点 t_1,t_2 处给出定解条件的边值问题来作为辅助的定解问题. 例如, 在 t_1 处我们给出 z 的第一个分量及 y 的两个分量, 而在 t_2 处给定 z 的第二个分量 (下标记分量号码, 而上标 $i=1,2$ 对应于 t_i)

$$\begin{aligned}
y(t_1,\mu)&=y_0^1+\mu y_1^1+\cdots+\mu^k y_k^1+\cdots,\\
z_1(t_1,\mu)&=z_{01}^1+\mu z_{11}^1+\cdots+\mu^k z_{k1}^1+\cdots,\\
z_2(t_1,\mu)&=z_{02}^2+\mu z_{12}^2+\cdots+\mu^k z_{k2}^2+\cdots,
\end{aligned} \tag{4.321}$$

其中 $y_k^1, z_{ki}^i, i=1,2$ 均为暂时未知的参数.

关于问题 (4.319), (4.321) 在区间 $[0,1]$ 上的渐近解, 我们假设它有如下形式 (见 §9 和 §14)

$$x(t,\mu)=\begin{cases}
\overset{(1)}{x}(t,\mu)+\overset{(1)}{Q}x(\tau_1,\mu), & 当\ 0\leqslant t\leqslant t_1,\\
\overset{(2)}{x}(t,\mu)+\overset{(2)}{\Pi}x(\tau_1,\mu)+\overset{(2)}{Q}x(\tau_2,\mu), & 当\ t_1\leqslant t\leqslant t_2,\\
\overset{(3)}{x}(t,\mu)+\overset{(3)}{\Pi}x(\tau_2,\mu), & 当\ t_2\leqslant t\leqslant 1,
\end{cases} \tag{4.322}$$

像前面一样, 这里 Π 表示在相应区间左端点附近的边界项, Q 表示在右端点附近的边界项, 而 $\tau_1=(t-t_1)/\mu, \tau_2=(t-t_2)/\mu$.

对于 $\overset{(i)}{\bar{x}}_0(t)$ 的方程为

$$\frac{d\overset{(i)}{\bar{y}}_0}{dt}=\overset{(i)}{\bar{z}}_0,\quad \overset{(i)}{\bar{z}}_0=\overset{(i)}{\varphi}(\overset{(i)}{\bar{y}}_0,t),\ i=1,2,3. \tag{4.323}$$

由 (4.321) 可得定解条件

$$\overset{(1)}{\bar{y}}_0(t_1)=y_0^1, \tag{4.324}$$

$$\overset{(2)}{\bar{y}}_0(t_1)=y_0^1, \tag{4.325}$$

在此我们加上保证 $\bar{y}_0(t)$ 在点 t_2 处连续的条件

$$\overset{(3)}{\bar{y}}_0(t_1)=\overset{(2)}{\bar{y}}_0(t_1). \tag{4.326}$$

从 (4.323) 当 $i=1,2$ 的方程组以及与它们相对应的初始条件 (4.324) 和 (4.325) 即可求出作为 t,y_0^1,t_1 的函数的解 $\overset{(i)}{\bar{y}}_0(t)$ (我们假设这两个初值问题对 y_0^1,t_1,t_2 在它们的某一变化区域中的任意值在其相应的区间上都有解). 于是由 (4.326) 即可得到作为 y_0^1,t_1,t_2 的函数的值 $\overset{(3)}{\bar{y}}_0(t_2)$. 求解 (4.323) 当 $i=3$ 时的方程组及已求出的初值 $\overset{(3)}{\bar{y}}_0(t_2)$ 的初值问题, 即得作为 t,y_0^1,t_1,t_2 的函数的解 $\overset{(3)}{\bar{y}}_0(t)$ (我们也假设这个初值问题有在 $[t_2,1]$ 上的解).

为了确定 y_0^1,t_1,t_2, 我们利用条件 (4.320), 其零次近似为

$$\overset{(1)}{\bar{y}}_0(0)=0,\quad \overset{(3)}{\bar{y}}_0(1)=0. \tag{4.327}$$

(4.327) 是含有四个未知量 $y_{01}^1,y_{02}^1,t_1,t_2$ 的四个方程式, 其相应的函数行列式写成分块的形式为

$$\Delta_0=\frac{D(\overset{(1)}{\bar{y}}_0(0),\overset{(3)}{\bar{y}}_0(1))}{D(y_0^1,t_1,t_2)}=$$

$$\left|\begin{array}{c|c|c}
\dfrac{\partial\overset{(1)}{\bar{y}}_0(0)}{\partial\overset{(1)}{\bar{y}}_0(t_1)}\cdot\dfrac{\partial\overset{(1)}{\bar{y}}_0(t_1)}{\partial y_0^1} & \dfrac{\partial\overset{(1)}{\bar{y}}_0(0)}{\partial t_1} & 0\\
\hline
\dfrac{\partial\overset{(3)}{\bar{y}}_0(1)}{\partial\overset{(3)}{\bar{y}}_0(t_2)}\cdot\dfrac{\partial\overset{(2)}{\bar{y}}_0(t_2)}{\partial\overset{(2)}{\bar{y}}_0(t_1)}\cdot\dfrac{\partial\overset{(2)}{\bar{y}}_0(t_1)}{\partial y_0^1} & \dfrac{\partial\overset{(3)}{\bar{y}}_0(1)}{\partial\overset{(3)}{\bar{y}}_0(t_2)}\cdot\dfrac{\partial\overset{(2)}{\bar{y}}_0(t_2)}{\partial t_1} & \dfrac{\partial\overset{(3)}{\bar{y}}_0(1)}{\partial t_2}+\dfrac{\partial\overset{(3)}{\bar{y}}_0(1)}{\partial\overset{(3)}{\bar{y}}_0(t_2)}\cdot\dfrac{\partial\overset{(2)}{\bar{y}}_0(t_2)}{\partial t_2}
\end{array}\right|$$

II. 假设方程组 (4.327) 关于 $y_{01}^1,y_{02}^1,t_1,t_2$ 可解, 而且 $0<t_1<t_2<1$ 以及行列式 $\Delta_0\neq 0$.

确定了上述参数之后, 我们就完全地找到了 $\overset{(i)}{\bar{x}}_0(t)$, 亦即求出了有两个角点的折线 $\bar{y}_0(t)$, 像在下面将看到的那样, 这条折线是问题 (4.319), (4.320) 的解的 y 分量

图形的极限曲线.

$$\overline{y}_0(t)=\begin{cases}\overset{(1)}{\overline{y}}_0(t), \text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_1,\\ \overset{(2)}{\overline{y}}_0(t), \text{当 } t_1\leqslant t\leqslant t_2,\\ \overset{(3)}{\overline{y}}_0(t), \text{当 } t_2\leqslant t\leqslant 1.\end{cases} \tag{4.328}$$

III. 假设在 t 的相应变化区间上有 $(\overset{(i)}{\overline{y}}_0(t),t)\in\overset{(i)}{D}$, $i=1,2,3$.

IV. 假设由方程

$$\mathrm{Det}(F_z(\overset{(i)}{\varphi}(\overset{(i)}{\overline{y}}_0(t),t),\overset{(i)}{\overline{y}}_0(t),t)-\overset{(i)}{\lambda}E_2)=0$$

所决定的特征值 $\overset{(i)}{\lambda}_k(t)$, $k=1,2$, 满足下列条件

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\overset{(1)}{\lambda}_1(t)>0, \mathrm{Re}\overset{(1)}{\lambda}_2(t)>0, \text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_1,\\ &\mathrm{Re}\overset{(2)}{\lambda}_1(t)<0, \mathrm{Re}\overset{(2)}{\lambda}_2(t)>0, \text{当 } t_1\leqslant t\leqslant t_2,\\ &\mathrm{Re}\overset{(3)}{\lambda}_1(t)<0, \mathrm{Re}\overset{(3)}{\lambda}_2(t)<0, \text{当 } t_2\leqslant t\leqslant 1.\end{aligned} \tag{4.329}$$

我们注意到由于 z 为二维向量, 因此 $\overset{(2)}{\lambda}_1(t)$ 和 $\overset{(2)}{\lambda}_2(t)$ 是实的而且符号相反.

对于零阶边界层函数, 像通常那样, 我们有等式

$$\overset{(1)}{Q}_0 y(\tau_1)=\overset{(2)}{\Pi}_0 y(\tau_1)=\overset{(2)}{Q}_0 y(\tau_2)=\overset{(3)}{\Pi}_0 y(\tau_2)\equiv 0,$$

以及方程

$$\frac{d\overset{(1)}{Q}_0 z}{d\tau_1}=F(\overset{(1)}{\varphi}(y_0^1,t_1)+\overset{(1)}{Q}_0 z,y_0^1,t_1),\ \tau_1\leqslant 0, \tag{4.330}$$

$$\frac{d\overset{(2)}{\Pi}_0 z}{d\tau_1}=F(\overset{(2)}{\varphi}(y_0^1,t_1)+\overset{(2)}{\Pi}_0 z,y_0^1,t_1),\ \tau_1\geqslant 0, \tag{4.331}$$

$$\frac{d\overset{(2)}{Q}_0 z}{d\tau_2}=F(\overset{(2)}{\varphi}(y_0^2,t_2)+\overset{(2)}{Q}_0 z,y_0^2,t_2),\ \tau_2\leqslant 0, \tag{4.332}$$

$$\frac{d\overset{(3)}{\Pi}_0 z}{d\tau_2}=F(\overset{(3)}{\varphi}(y_0^2,t_2)+\overset{(3)}{Q}_0 z,y_0^2,t_2),\ \tau_2\geqslant 0, \tag{4.333}$$

其中 $y_0^2\equiv\overset{(2)}{\overline{y}}_0(t_2)=\overset{(3)}{\overline{y}}_0(t_2)$. 由 (4.321) 即得定解条件

$$(\overset{(1)}{Q}_0 z(0))_1=z_{01}^1-\overset{(1)}{\varphi}_1(y_0^1,t_1), \tag{4.334}$$

$$(\overset{(2)}{\Pi}_0 z(0))_1 = z_{01}^1 - \overset{(2)}{\varphi}_1 (y_0^1, t_1), \tag{4.335}$$

$$(\overset{(2)}{Q}_0 z(0))_2 = z_{02}^2 - \overset{(2)}{\varphi}_2 (y_0^2, t_2), \tag{4.336}$$

$$(\overset{(3)}{\Pi}_0 z(0))_2 = z_{02}^2 - \overset{(3)}{\varphi}_2 (y_0^2, t_2). \tag{4.337}$$

在这些定解条件中还有参数 z_{01}^1 和 z_{02}^2 是未知的.

因为从 (4.329) 即知方程组 (4.331) 的奇点 $\overset{(2)}{\Pi}_0 z = 0$ 是鞍点, 即条件稳定奇点, 所以从条件 $\overset{(2)}{\Pi}_0 z(\infty) = 0$ (边界函数在无穷远趋于零是通常的要求) 即得初值 $\overset{(2)}{\Pi}_0 z(0) = z_0^1 - \overset{(2)}{\varphi} (y_0^1, t_1)$ 应当位于当 $\tau_1 \to \infty$ 时趋于鞍点 $\overset{(2)}{\Pi}_0 z(\infty) = 0$ 的分界轨线上, 由此确定 z_0^1 二分量间的联系, 例如, $z_{02}^1 = f_1(z_{01}^1)$, 而 z_{01}^1 本身暂时仍不知道 (我们注意到最后这个关系式与 §14 的 (4.75) 是一样的, 只是记号的使用不同而已, 特别现在是用第二个下标表示分量的号码). 把这种设想用于方程组 (4.332) 及条件 (4.336), 同理可得 $z_{01}^2 = f_2(z_{02}^2)$. 另一方面, 初值 $\overset{(1)}{Q}_0 z(0) = z_0^1 - \overset{(1)}{\varphi} (y_0^1, t_1)$ 应当属于方程组 (4.330) 的奇点 $\overset{(1)}{Q}_0 z = 0$ 的影响域; 由于 (4.329) 即知这个奇点是当 $\tau_1 \to -\infty$ 时的稳定结点或稳定焦点. 如果在 (4.330) 中作替换 $\tilde{z}(\tau_1) = \overset{(1)}{\varphi} (y_0^1, t_1) + \overset{(1)}{Q}_0 z(\tau_1)$, 而在 (4.331) 中作替换 $\tilde{z}(\tau_1) = \overset{(2)}{\varphi} (y_0^1, t_1) + \overset{(2)}{\Pi}_0 z(\tau_1)$, 那么这两种情况都得到同一个关于 $\tilde{z}(\tau_1)$ 的方程组 (参数 y_0^1, t_1 的附加方程组)

$$\frac{d\tilde{z}}{d\tau_1} = F(\tilde{z}, y_0^1, t_1) \tag{4.338}$$

及定解条件 $\tilde{z}(0) = z_0^1$. 同样在点 (y_0^2, t_2) 有类似的附加方程组和定解条件

$$\frac{d\tilde{\tilde{z}}}{d\tau_2} = F(\tilde{\tilde{z}}, y_0^2, t_2), \quad \tilde{\tilde{z}}(0) = z_0^2; \tag{4.339}$$

显然上述的两个条件并没有矛盾, 我们叙述如下:

V. 在对应于附加方程组 (4.338) 的相平面 $\tilde{z}$ 上, 应当存在轨线 L_1, 它在 $\tau_1 \to -\infty$ 时从结点 (或焦点) $\tilde{z} = \overset{(1)}{\varphi} (y_0^1, t_1)$ 离开, 并在 $\tau_1 = \infty$ 时进入鞍点 $\tilde{z} = \overset{(2)}{\varphi} (y_0^1, t_1)$, 而且点 z_0^1 应当位于 L_1 上. 此外还设 $F_1(\tilde{z}, y_0^1, t_1)$ 沿 L_1 保持符号不变.

在对应于附加方程组 (4.339) 的相平面 $\tilde{\tilde{z}}$ 上, 应当存在轨线 L_2, 它在 $\tau_2 \to -\infty$ 时从鞍点 $\tilde{\tilde{z}} = \overset{(2)}{\varphi} (y_0^2, t_2)$ 离开, 并在 $\tau_2 = \infty$ 时进入结点 (或焦点) $\tilde{\tilde{z}} = \overset{(3)}{\varphi} (y_0^2, t_2)$, 而且点 z_0^2 应当位于 L_2 上. 此外还设 $F_2(\tilde{\tilde{z}}, y_0^2, t_2)$ 沿 L_2 保持符号不变.

条件 V 保证了零阶边界函数在无穷远的减小, 但是这时 z_{01}^1 和 z_{02}^2 暂时仍未确定.

我们继续构造展开式 (4.322) 后面的项. 对于 $\overset{(i)}{x}_1 (t)$ 的方程为

$$\frac{d\overset{(i)}{z}_0}{dt} = \overset{(i)}{\bar{F}}_z (t) \overset{(i)}{\bar{z}}_1 + \overset{(i)}{\bar{F}}_y (t) \overset{(i)}{\bar{y}}_1, \quad \frac{d\overset{(i)}{\bar{y}}_1}{dt} = \overset{(i)}{\bar{z}}_1, \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.340}$$

这里

$$\overset{(i)}{\bar{F}}_z(t)=F_z(\overset{(i)}{\varphi}(\overset{(i)}{\bar{y}}_0(t),t),\overset{(i)}{\bar{y}}_0(t),t),\quad \overset{(i)}{\bar{F}}_y(t)=F_y(\overset{(i)}{\varphi}(\overset{(i)}{\bar{y}}_0(t),t),\overset{(i)}{\bar{y}}_0(t),t)$$

由 (4.321) 即得定解条件 (见 (3.120), (3.123))

$$\overset{(1)}{\bar{y}}_1(t_1)=y_1^1+\int_0^{-\infty}\overset{(1)}{Q}{}_0'\,z(\tau)d\tau, \tag{4.341}$$

$$\overset{(2)}{\bar{y}}_1(t_1)=y_1^1+\int_0^{\infty}\overset{(2)}{\Pi}_0\,z(\tau)d\tau. \tag{4.342}$$

在此我们加上保证解的 y 分量的 μ 阶项在点 t_2 处连续的条件

$$\overset{(3)}{\bar{y}}_1(t_2)=\overset{(2)}{\bar{y}}_1(t_2)+\int_0^{\infty}\overset{(3)}{\Pi}_0\,z(\tau)d\tau-\int_0^{-\infty}\overset{(2)}{Q}_0\,z(\tau)d\tau \tag{4.343}$$

(类似于 (4.321), 如果以 y_1^2 记 $y(t_2,\mu)$ 对 μ 的幂展开式中 μ 的系数, 那么由于 $\overset{(3)}{\bar{y}}_1(t_2)-\int_0^{\infty}\overset{(3)}{\Pi}_0\,z(\tau)d\tau$ 和 $\overset{(2)}{\bar{y}}_1(t_2)-\int_0^{-\infty}\overset{(2)}{Q}_0\,z(\tau)d\tau$ 都等于同一个值 y_1^2, 因此它们彼此相等, 这就是 (4.343). 在我们的构造中并不包含量 y_i^2; 由于点 t_1 和 t_2 是平等的, 假如在条件 (4.321) 中代替 $y(t_1,\mu)$ 而给定 $y(t_2,\mu)$, 那么后面的运算就只与系数 y_i^2 有关).

从 (4.340) 当 $i=1,2$ 的线性方程组以及与它们相对应的初始条件 (4.341) 和 (4.342), 即可求出作为 t,y_1^1,z_{01}^1 的函数的解 $\overset{(i)}{\bar{y}}_1(t)$, $i=1,2$ (对 z_{01}^1 的依赖性是由于 (4.341), (4.342) 的积分项含有 z_{01}^1), 于是由 (4.343) 即可得到作为 y_1^1,z_{01}^1 和 z_{02}^2 的函数的值 $\overset{(3)}{\bar{y}}_1(t_2)$ (对 z_{02}^2 的依赖性是由于 (4.343) 的积分项含有 z_{02}^2). 现在求解 (4.340) 当 $i=3$ 的线性方程组及已求出的初值 $\overset{(3)}{\bar{y}}_1(t_2)$ 的初值问题, 即得作为 $t,y_1^1,z_{01}^1,z_{02}^2$ 的函数的解 $\overset{(3)}{\bar{y}}_1(t)$.

为了确定 y_1^1,z_{01}^1,z_{02}^2, 从 (4.320) 可得方程

$$\overset{(1)}{\bar{y}}_1(0)=0,\quad \overset{(3)}{\bar{y}}_1(1)=0. \tag{4.344}$$

VI. *假设方程组 (4.344) 关于 y_1^1,z_{01}^1,z_{02}^2 可解, 而且设 z_{01}^1,z_{02}^2 满足条件 V.*

这就意味着所求出的值 z_{01}^1 是属于函数 $z_{02}^1=f_1(z_{01}^1)$ 的定义域, 因而利用求得的 z_{01}^1 即可确定 z_{02}^1, 使得坐标为 (z_{01}^1,z_{02}^1) 的点 z_0^1 位于 L_1 上. 对求出的 z_{02}^2 也可以作出类似的说明.

确定了 y_1^1,z_{01}^1,z_{02}^2 之后, 我们即可完全求出 $\overset{(i)}{\bar{x}}_1(t)$ 及零阶边界函数. 对应于 (4.344) 的函数行列式, 写成分块的形式为

$$\Delta_1 \equiv \frac{D(\overset{(1)}{\overline{y}}_1(0), \overset{(3)}{\overline{y}}_1(1))}{D(y_1^1, z_{01}^1, z_{02}^2)} =$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_1(0)}{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_1(t_1)} \cdot \dfrac{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_1(t_1)}{\partial y_1^1} & \dfrac{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_1(0)}{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_1(t_1)} \cdot \dfrac{\partial}{\partial z_{01}^1}\left(\displaystyle\int_0^{-\infty} \overset{(1)}{Q}_0\, z(\tau)d\tau\right) & 0 \\ \dfrac{\partial \overset{(3)}{\overline{y}}_1(1)}{\partial \overset{(3)}{\overline{y}}_1(t_2)} \cdot \dfrac{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_1(t_2)}{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_1(t_1)} \times \dfrac{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_1(t_1)}{\partial y_1^1} & \dfrac{\partial \overset{(3)}{\overline{y}}_1(1)}{\partial \overset{(3)}{\overline{y}}_1(t_2)} \cdot \dfrac{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_1(t_2)}{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_1(t_1)} \times \dfrac{\partial}{\partial z_{01}^1}\left(\displaystyle\int_0^{\infty} \overset{(2)}{\Pi}_0\, z(\tau)d\tau\right) & \dfrac{\partial \overset{(3)}{\overline{y}}_1(1)}{\partial \overset{(3)}{\overline{y}}_1(t_2)} \cdot \dfrac{\partial}{\partial z_{02}^2}\left(-\displaystyle\int_0^{-\infty} \overset{(2)}{Q}_0\, z(\tau)d\tau + \int_0^{\infty} \overset{(3)}{\Pi}_0\, z(\tau)d\tau\right) \end{vmatrix}$$

下面我们来比较 Δ_1 与 Δ_0; 于是像在第 2 段那样, 可以证明有下列等式成立:

$$\frac{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_1(0)}{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_1(t_1)} = \frac{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_0(0)}{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_0(t_1)} \equiv A,\ \frac{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_1(t_2)}{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_1(t_1)} = \frac{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_0(t_2)}{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_0(t_1)} \equiv B,$$

$$\frac{\partial \overset{(3)}{\overline{y}}_1(1)}{\partial \overset{(3)}{\overline{y}}_1(t_2)} = \frac{\partial \overset{(3)}{\overline{y}}_0(1)}{\partial \overset{(3)}{\overline{y}}_0(t_2)} \equiv C, \tag{4.345}$$

$$\frac{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_1(t_1)}{\partial y_1^1} = \frac{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_1(t_1)}{\partial y_1^1} = \frac{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_0(t_1)}{\partial y_0^1} = \frac{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_0(t_1)}{\partial y_0^1} = E_2;$$

这里 A, B, C 为相应的二阶方阵, 而 E_2 为 2×2 为单位矩阵. 此外还有

$$\frac{\partial \overset{(1)}{\overline{y}}_0(0)}{\partial t_1} = -A \overset{(1)}{\varphi}(y_0^1, t_1),\ \frac{\partial}{\partial z_{01}^1}\left(\int_0^{-\infty} \overset{(1)}{Q}_0\, z(\tau)d\tau\right) = \frac{\overset{(1)}{\varphi}(y_0^1, t_1) - z_0^1}{F_1(z_0^1, y_0^1, t_1)},$$

$$\frac{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_0(t_2)}{\partial t_1} = -B \overset{(2)}{\varphi}(y_0^1, t_1),\ \frac{\partial}{\partial z_{01}^1}\left(\int_0^{-\infty} \overset{(2)}{\Pi}_0\, z(\tau)d\tau\right) = \frac{\overset{(2)}{\varphi}(y_0^1, t_1) - z_0^1}{F_1(z_0^1, y_0^1, t_1)}; \tag{4.346}$$

$$\frac{\partial \overset{(3)}{\overline{y}}_0(1)}{\partial t_2} = -C \overset{(3)}{\varphi}(y_0^2, t_2), \quad \frac{\partial \overset{(2)}{\overline{y}}_0(t_2)}{\partial t_2} = \overset{(2)}{\varphi}(y_0^2, t_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_{02}^2}\left(-\int_0^{-\infty} \overset{(2)}{Q}_0\, z(\tau)d\tau + \int_0^{\infty} \overset{(3)}{\Pi}_0\, z(\tau)d\tau\right) = \frac{\overset{(3)}{\varphi}(y_0^2, t_2) - \overset{(2)}{\varphi}(y_0^2, t_2)}{F_2(z_0^2, y_0^2, t_2)}. \tag{4.347}$$

将 (4.345) ~ (4.347) 代入 Δ_0 和 Δ_1 的表达式即得

$$\Delta_1 = \frac{1}{F_1(z_0^1, y_0^1, t_1) F_2(z_0^2, y_0^2, t_2)} \Delta_0; \tag{4.348}$$

因为从条件 V 即知 $F_1(z_0^1, y_0^1, t_1) \neq 0$, $F_2(z_0^2, y_0^2, t_2) \neq 0$, 而由条件 II 有 $\Delta_0 \neq 0$, 所以从 (4.348) 即得 $\Delta_1 \neq 0$.

练习 验证等式 (4.345) ~ (4.348).

我们继续构造展开式 (4.322). 对于任意 k, $k=1,2,\cdots$, 代替 (4.344) 我们有关于 $y^1_{k+1}, z^1_{k1}, z^2_{k2}$ 的线性方程组

$$\overset{(1)}{y}_{k+1}(0)=0, \quad \overset{(3)}{y}_{k+1}(1)=0. \tag{4.349}$$

不难证明, 这个方程组的行列式等于 Δ_1, 亦即方程组 (4.349) 是唯一可解的, 这就给出构造 $\overset{(i)}{x}_{k+1}(t)$ 及号码为 k 的边界函数的可能性.

练习 证明方程组 (4.349) 的行列式等于 Δ_1.

至此我们可以认为构造展开式 (4.322) 已经完成了.

我们用 $\overset{(i)}{X}_n(t,\mu)$, $i=1,2,3$ 表示级数 (4.322) 的部分和, 并令

$$X_n(t)=\begin{cases}\overset{(1)}{X}_n(t,\mu), \text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_1,\\ \overset{(2)}{X}_n(t,\mu), \text{当 } t_1\leqslant t\leqslant t_2,\\ \overset{(3)}{X}_n(t,\mu), \text{当 } t_2\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

我们给出由五条曲线段组成的曲线 L_0 如下:

$$\begin{aligned}
L_{01}&=\{(z,y,t):z=\overset{(1)}{z}_0(t),\ y=\overset{(1)}{y}_0(t),\ 0\leqslant t\leqslant t_1\},\\
L_{02}&=\{(z,y,t):z=\widetilde{z}(\tau),\ -\infty<\tau<\infty;\ y=y^1_0,\ t=t_1\},\\
L_{03}&=\{(z,y,t):z=\overset{(2)}{z}_0(t),\ y=\overset{(2)}{y}_0(t),\ t_1\leqslant t\leqslant t_2\},\\
L_{04}&=\{(z,y,t):z=\widetilde{\widetilde{z}}(\tau),\ -\infty<\tau<\infty;\ y=y^2_0,\ t=t_2\},\\
L_{05}&=\{(z,y,t):z=\overset{(3)}{z}_0(t),\ y=\overset{(3)}{y}_0(t),\ t_2\leqslant t\leqslant 1\}.
\end{aligned}$$

VII. 假设函数 $F(z,y,t)$ 在曲线 L_0 的某个 δ-管中有直到包括 $(n+2)$ 阶在内的连续偏导数.

下面的定理是正确的, 但在此我们不进行证明.

定理 4.4 当满足条件 I ~ VII 时, 存在常数 $\mu_0>0$, $\delta>0$ 和 $C>0$, 使得当 $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时, 在曲线 L_0 的 δ-管中存在问题 (4.319), (4.320) 的唯一解 $X(t,\mu)$, 且对 $0\leqslant t\leqslant 1$ 满足不等式

$$\| X(t,\mu)-X_n(t,\mu)\|\leqslant C\mu^{n+1}. \tag{4.350}$$

注 1. 如果只考虑解的存在性和唯一性, 那么在条件 VII 中只须取 $n=0$.

2. 由 (4.350) 得出, 所论解的 y 分量的极限曲线是由三段组成的折线 (4.328).

3. 上述类型的构造也可以对更一般的方程组进行, 例如当 (4.319) 第二组方程的右端不等于 z, 而等于 $f(z,y,t)$, 以及 y 的维数大于 2, 这时定解条件不同于 (4.320) 仅在于当 $t=0$ 和 $t=1$ 时不给定 y 的全部分量. 至于 z 的维数是本质的, 它必须为二维, 否则在构造渐近解时, 像第 2 段那样会出现超定方程组.

4. 在当向量 z 的维数为 M 的一般情况下, 解也可能存在, 这时作为 y 分量的极限曲线是由 $M+1$ 段曲线组成的折线; 但是为此必须要求方程 $F(z,y,t)=0$ 有 $M+1$ 个根 $z=\overset{(i)}{\varphi}(y,t), i=1,2,\cdots,M+1$, 以及定解条件的个数为 $M+m$; 于是按照给定的定解条件可以像上面讨论 $M=2$ 时的同样步骤构造顶点在 $t_1,t_2,\cdots,t_M$ 的由 $(M+1)$ 段曲线组成的折线 $\overline{y}_0(t)$ (即 (4.328) 的推广). 而且代替 (4.329) 只要下列条件 (记号的意义与 (4.329) 相同)

$$\mathrm{Re}\,\overset{(1)}{\lambda}_1(t)>0,\ \mathrm{Re}\,\overset{(1)}{\lambda}_2(t)>0,\cdots,\mathrm{Re}\,\overset{(1)}{\lambda}_M(t)>0,\ \text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_1,$$

$$\mathrm{Re}\,\overset{(2)}{\lambda}_1(t)<0,\ \mathrm{Re}\,\overset{(2)}{\lambda}_2(t)>0,\cdots,\mathrm{Re}\,\overset{(2)}{\lambda}_M(t)>0,\ \text{当 } t_1\leqslant t\leqslant t_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathrm{Re}\,\overset{(M+1)}{\lambda}_1(t)<0,\ \mathrm{Re}\,\overset{(M+1)}{\lambda}_2(t)<0,\cdots,\mathrm{Re}\,\overset{(M+1)}{\lambda}_M(t)<0,\ \text{当 } t_M\leqslant t\leqslant t_1,$$

成立. 即可像上面对 $M=2$ 时的讨论过程那样进行后面的论证.

作为本段的结束, 我们介绍一个具有所论类型解的方程组例子 (参看 [16]).

$$\mu\frac{dz_1}{dt}=z_2(1-z_1^2),\quad \mu\frac{dz_2}{dt}=z_1(1-z_2^2),\quad \frac{dy_1}{dt}=z_1-\frac{1}{2},\quad \frac{dy_2}{dt}=z_2; \tag{4.351}$$

$$y_1(0)=y_2(0)=0,\quad y_1(1)=y_2(1)=0. \tag{4.352}$$

这时退化方程组有根

$$\varphi_{(1)}=\begin{pmatrix}\overset{(1)}{\varphi}_1\\ \overset{(1)}{\varphi}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \overset{(2)}{\varphi}=\begin{pmatrix}\overset{(2)}{\varphi}_1\\ \overset{(2)}{\varphi}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ \overset{(3)}{\varphi}=\begin{pmatrix}\overset{(3)}{\varphi}_1\\ \overset{(3)}{\varphi}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};$$

对应的特征值均为常数

$$\overset{(1)}{\lambda}=\begin{pmatrix}\overset{(1)}{\lambda}_1\\ \overset{(1)}{\lambda}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix},\ \overset{(2)}{\lambda}=\begin{pmatrix}\overset{(2)}{\lambda}_1\\ \overset{(2)}{\lambda}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ \overset{(3)}{\lambda}=\begin{pmatrix}\overset{(3)}{\lambda}_1\\ \overset{(3)}{\lambda}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}.$$

按照上述办法 (考虑到关于 f 的注 3) 构造出的折线 (4.328) 为 $(t_1=\frac{1}{4},\ t_2=\frac{3}{4})$

$$\overline{y}_{01}(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{2}, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{4},\\ \dfrac{1}{4}-\dfrac{t}{2}, & \text{当 } \dfrac{1}{4}\leqslant t\leqslant\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{2}, & \text{当 } \dfrac{3}{4}\leqslant t\leqslant 1;\end{cases}\quad \overline{y}_{02}(t)=\begin{cases}-t, & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\dfrac{1}{4},\\ -\dfrac{1}{4}, & \text{当 } \dfrac{1}{4}\leqslant t\leqslant\dfrac{3}{4},\\ t-1, & \text{当 } \dfrac{3}{4}\leqslant t\leqslant 1.\end{cases} \tag{4.353}$$

容易求出问题 (4.351), (4.352) 的精确解, 利用精确解的表达式可以确信解的 y 分量当 $\mu\to 0$ 时趋于折线 (4.353), 即

$$\lim_{\mu\to 0} y(t,\mu)=\overline{y}_0(t),\ \text{当}\ 0\leqslant t\leqslant 1. \tag{4.354}$$

练习 找出问题 (4.351), (4.352) 的精确解, 并且验证等式 (4.353), (4.354).

4. 在相同稳定性程度的根之间的转移 在本段将证明, 从根 $\overset{(j)}{\varphi}$ 到根 $\overset{(k)}{\varphi}$ 的转移现象不仅可以发生在 $\overset{(k)}{\varphi}$ 所对应的特征值 λ_i 有负实部的个数较多的情况下, 而且也发生在 $\overset{(j)}{\varphi}$ 和 $\overset{(k)}{\varphi}$ 所对应的特征值 λ_i 有负实部的个数和有正实部的个数分别都相等的情况下, 亦即 $\overset{(j)}{\varphi}$ 和 $\overset{(k)}{\varphi}$ 有相同的稳定性程度.

我们将对与一个二阶方程式 $\mu^2\dfrac{d^2z}{dt^2}=F(z,t)$ 等价的方程组

$$\mu\frac{dz_1}{dt}=F(z_2,t),\quad \mu\frac{dz_2}{dt}=z_1,\quad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{4.355}$$

及边界条件

$$z_2(0,\mu)=0,\quad z_2(1,\mu)=0. \tag{4.356}$$

进行详细讨论.

为了研究上述现象, 我们首先考虑从 (4.355) 得到的定常系统, 为此在 (4.355) 右端令 t 等于常数 T 并作变量替换 $t=\mu\tau$

$$\frac{dz_1}{d\tau}=F(z_2,T)\equiv F(z_2),\quad \frac{dz_2}{d\tau}=z_1 \tag{4.357}$$

这是 (4.355) 当 $t=T$ 时所对应的附加方程组 (见第一章) . 设函数 $F(z_2)$ 有三个简单零点 $z_2=\varphi_i, i=1,2,3$, 而且对 $i=1,3$ 有 $F_{z_2}(\varphi_i)>0$ 以及 $F_{z_2}(\varphi_2)<0$ (见图 5). 我们引进相平面 (z_1,z_2). 从 (4.357) 消去 τ 即得

$$\frac{z_1^2}{2}=\int_{\varphi_2}^{z_2}F(z)dz+C\equiv\Phi(z_2)+C$$

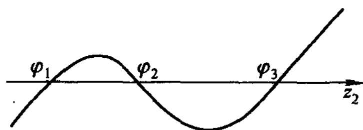


图 5 函数 $F(z_2)$ 的图形

于是有

$$z_1=\pm\sqrt{2}\sqrt{\Phi(z_2)+C}. \tag{4.358}$$

由此可见, 相轨线族 (4.358) 依赖于 $\Phi(z_2)$ 图形的特性而不同; 可以将其分成三种情况, 其中每一种都在图 6 上画出 $\Phi(z_2)$ 的图形及其对应的相轨线族:

(a)

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(z)dz > \int_{\varphi_3}^{\varphi_2} F(z)dz$$

即在图 5 中的面积 I 大于面积 II , 或者 $\Phi(\varphi_1) < \Phi(\varphi_3)$;

(b)

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(z)dz < \int_{\varphi_3}^{\varphi_2} F(z)dz$$

即面积 I 小于面积 II , 或者 $\Phi(\varphi_1) > \Phi(\varphi_3)$;

(c)

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(z)dz = \int_{\varphi_3}^{\varphi_2} F(z)dz \tag{4.359}$$

即面积 I 等于面积 II , 或者 $\Phi(\varphi_1) = \Phi(\varphi_3)$. 这时鞍点 A_1 和 A_3 用两条分界线联接起来 (见图 6 c)), 即形成所谓的胞腔.

我们现在转到非定常系统 (4.355) 的讨论.

I. 假设函数 $F(z_2,t)$ 在 (z_2,t) 平面上的某个区域 D 中有直到包括二阶在内的连续偏导数.

II. 假设方程 $F(z_2,t)=0$ 有满足下列条件的三个根 $z_2=\varphi_i(t), i=1,2,3$:

1) 对 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 有 $\varphi_1(t) < \varphi_2(t) < \varphi_3(t)$;

2) 区域 $\{(z_2,t) : \varphi_1(t) \leqslant z_2 \leqslant \varphi_3(t), 0 \leqslant t \leqslant 1\} \subset D$;

3) 对 $i=1,3$ 有

$$F_{z_2}(\varphi_i(t),t) > 0, \text{ 当 } 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

$$F_{z_2}(\varphi_2(t),t) < 0, \text{ 当 } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

由条件 II 即知, 对任一确定的 $t \in [0,1], F(z_2,t)$ 的图形都是像图 5 的样子. 这个图形可以随着 t 的变化而有些变形, 特别可能变动面积 I 和 II 之间的关系. 于是, 如果对于某个值 $t=T$ 时有面积 I 和 II 相等, 亦即在对应于值 $t=T$ 的附加方程组的相平面上出现胞腔 (情形 B)), 那么可以看到问题 (4.355), (4.356) 的解从根 $\varphi_3(t)$ 到根 $\varphi_1(t)$ (这两个根都是条件稳定的: $\overset{(i)}{\lambda}_{1,2}(t) = \pm\sqrt{F_{z_2}(\varphi_i(t),t)}$) 的转移现象. 反过来说, 为了从一个鞍点到另一个鞍点的转移, 它们之间应当存在着分界线形式的 “桥” (见图 6 c)).

利用 §14 的渐近公式可以得出这个结论, 我们证明存在像图 7 所描述那种类型的解, 它具有与图 6 c) 相对应的*转点* T (我们这样约定, 称使得 $z_2=\varphi_2$ 且属于 (0,1) 的 t 值为转点). 为此我们采用下述方法. 从一个在 $t=0$ 和 $t=1$ 之间且暂时还不知道的值 T 出发, 我们利用 §14 的算法, 在区间 $[0,T]$ 上构造一个满足条件 $z_2(0,\mu)=0, z_2(T,\mu)=\varphi_2(T)$ 且当 $\mu\to 0$ 时趋于 $(0,\varphi_3(t))$ 的方程组 (4.355) 的

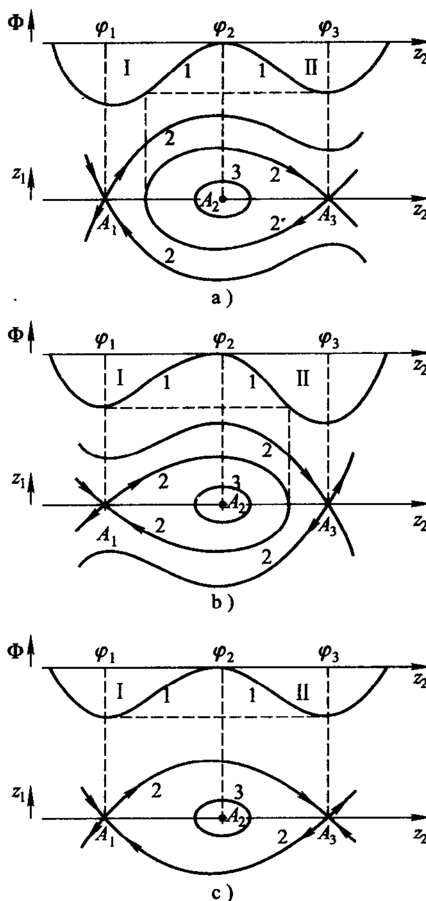


图 6　1 是$\Phi(z_2)$ 的图形. 坐标为 $(z_1, z_2) = (0, \varphi_1)$ 的点 A_1 和坐标为 $(z_1, z_2) = (0, \varphi_3)$ 的点 A_3 是鞍点; 坐标为 $(z_1, z_2) = (0, \varphi_2)$ 的点 A_2 是中心. 2 是分界轨线. 3 是围绕中心的闭轨线, 箭头表示相点随 τ 增加的运动方向.

解的渐近表达式. 换句话说, 我们构造了一个对应于图 7 上左半部分的渐近解. 由于I和II, 在 §14 中所列举的这个解的所有存在性条件, 暂时除了条件 V 之外, 都满足了; 关于条件 V 将在下面说明①.

---

①对于 $i = 1, 3$, 矩阵 $\begin{bmatrix} 0, & F_{z_2}(\varphi_i(t), t) \\ 1, & 0 \end{bmatrix}$ 的特征值 $\overset{(i)}{\lambda}_1(t)$ 和 $\overset{(i)}{\lambda}_2(t)$ 所对应的特征向量 $\overset{(i)}{b}_1(t) = \begin{bmatrix} \overset{(i)}{b}_{11}(t) \\ \overset{(i)}{b}_{12}(t) \end{bmatrix}$ 和 $\overset{(i)}{b}_2(t) = \begin{bmatrix} \overset{(i)}{b}_{21}(t) \\ \overset{(i)}{b}_{22}(t) \end{bmatrix}$ 具有这样的性质, 即对于 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 和 $k, j = 1, 2$ 有 $\overset{(i)}{b}_{kj}(t) \neq 0$. 因此在我们现在的情况下, 包含在 §14, V, a) 中的条件 $\det B_{11}(0) \neq 0, \det B_{22}(0) \neq 0$, 以及包含在 §14, V, b) 中的类似条件就归结为条件 $\overset{(3)}{b}_{11}(0) \neq 0$, $\overset{(3)}{b}_{22}(0) \neq 0$, $\overset{(3)}{b}_{11}(T) \neq 0$, $\overset{(3)}{b}_{22}(T) \neq 0$, 且都得到满足. 关于图 7 的右半部分 $(i = 1)$ 也有同样说明. 因此下面只须考虑有关 S^+ 和 S^- 的条件.

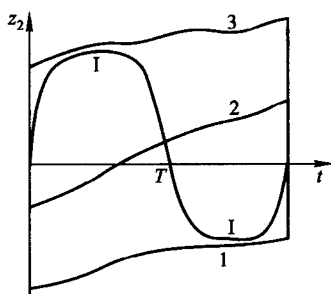


图 7　1,2,3 是 $z_2=\varphi_i(t)$, $i=1,2,3$, 的图形; I 是问题 (4.355), (4.356) 解的 z_2-分量图形, T 是转变点.

我们注意到由于这时在区间两端给定的是同一个分量 z_2 的值, 因此, 上述问题并不完全类似于 §14 所描述的情形, 但是对于这种情形, 这个理论仍然正确 (参看 §14 第十一段).

完全一样地我们在区间 $[T,1]$ 上构造方程组 (4.355) 满足条件 $z_2(T,\mu)=\varphi_2(T)$, $z_2(1,\mu)=0$ 且当 $\mu\to 0$ 时趋于 $(0,\varphi_1(t))$ 的渐近解, 亦即对应于图 7 上右半部分的解. 由于 I 和 II , 这个解的存在性条件, 暂时除了条件 V 之外, 也都满足了.

使得对应于上半部分和下半部分的 z_1 表达式在点 T 处相等, 即得决定那个实际上就是转点的值 T 的方程, 因为在 T 处, 对应于左半部分的曲线与对应于右半部分的曲线光滑地连接了 (z_1 与 $\dfrac{dz_2}{dt}$ 只差因子 μ). 我们注意到 T 一般来说, 是 μ 的函数, 因此应当求它在如下形式: $T=T_0+\mu T_1+\cdots+\mu^k T_k+\cdots$. 量 T_0 就由 z_1 的零次近似项等式的条件决定. 我们只就零次近似进行讨论, 因而下面就略掉 T_0 中的下标 0 ($T_0=T$).

根据 §14 第五段, 我们用下面的公式给出对应于左半部分且精确到 $O(\mu)$ 的解 (边界函数的第一个下标表示由 $[0,1]$ 分成的两个区间的号码):

$$\begin{aligned} z_1(t,\mu) &= \overset{(1)}{\Pi}_0\, z_1(\tau_0)+\overset{(1)}{Q}_0\, z_1(\tau_T)+O(\mu),\\ z_2(t,\mu) &= \varphi_3(t)+\overset{(1)}{\Pi}_0\, z_2(\tau_0)+\overset{(1)}{Q}_0\, z_2(\tau_T)+O(\mu), \end{aligned} \tag{4.360}$$

其中边界函数 $\overset{(1)}{\Pi}_0\, z_i(\tau_0)$ 和 $\overset{(1)}{Q}_0\, z_i(\tau_T)$ 由下列方程和定解条件所决定:

$$\frac{d\overset{(1)}{\Pi}_0\, z_1}{d\tau_0}=F(\varphi_3(0)+\overset{(1)}{\Pi}_0\, z_2,0),\quad \frac{d\overset{(1)}{\Pi}_0\, z_2}{d\tau_0}=\overset{(1)}{\Pi}_0\, z_1,\ \tau_0=\frac{t}{\mu}\geqslant 0, \tag{4.361}$$

$$\overset{(1)}{\Pi}_0\, z_2(0)=-\varphi_3(0),\quad \overset{(1)}{\Pi}_0\, z_i(\infty)=0,\ i=1,2;$$

$$\frac{d\overset{(1)}{Q}_0\, z_1}{d\tau_T}=F(\varphi_3(T)+\overset{(1)}{Q}_0\, z_2,T),\quad \frac{d\overset{(1)}{Q}_0\, z_2}{d\tau_T}=\overset{(1)}{Q}_0\, z_1,\ \tau_T=\frac{t-T}{\mu}\leqslant 0, \tag{4.362}$$

$$\overset{(1)}{Q}_0 z_2(0)=\varphi_2(T)-\varphi_3(T),\quad \overset{(1)}{Q}_0 z_i(-\infty)=0,\ i=1,2. \tag{4.363}$$

另一方面, 方程组 (4.355) 对应于右半部分的渐近解为

$$\begin{aligned}z_1(t,\mu)&=\overset{(2)}{\Pi}_0 z_1(\tau_T)+\overset{(2)}{Q}_0 z_1(\tau_1)+O(\mu),\\ z_2(t,\mu)&=\varphi_1(t)+\overset{(2)}{\Pi}_0 z_2(\tau_T)+\overset{(2)}{Q}_0 z_2(\tau_1)+O(\mu),\end{aligned} \tag{4.364}$$

其中

$$\frac{d\overset{(2)}{\Pi}_0 z_1}{d\tau_T}=F(\varphi_1(T)+\overset{(2)}{\Pi}_0 z_2,T),\quad \frac{d\overset{(2)}{\Pi}_0 z_2}{d\tau_T}=\overset{(2)}{\Pi}_0 z_1,\ \tau_T\geqslant 0, \tag{4.365}$$

$$\overset{(2)}{\Pi}_0 z_2(0)=\varphi_2(T)-\varphi_1(T),\quad \overset{(2)}{\Pi}_0 z_i(\infty)=0,\ i=1,2; \tag{4.366}$$

$$\frac{d\overset{(2)}{Q}_0 z_1}{d\tau_1}=F(\varphi_1(1)+\overset{(2)}{Q}_0 z_2,1),\quad \frac{d\overset{(2)}{Q}_0 z_2}{d\tau_1}=\overset{(2)}{Q}_0 z_1,\ \tau_1=\frac{t-1}{\mu}\leqslant 0,$$

$$\overset{(2)}{Q}_0 z_2(0)=-\varphi_1(1),\quad \overset{(2)}{Q}_0 z_i(-\infty)=0,\ i=1,2.$$

当 $t=T$ 时, 令 (4.360) 和 (4.364) 相等, 并考虑到在 $t=T$ 处 $\overset{(1)}{\Pi}_0 z_i$ 和 $\overset{(2)}{Q}_0 z_i$ 都是指数式小的量, 于是其零次近似即得

$$\overset{(1)}{Q}_0 z_1(0)=\overset{(2)}{\Pi}_0 z_1(0), \tag{4.367}$$

$$\varphi_3(T)+\overset{(1)}{Q}_0 z_2(0)=\varphi_1(T)+\overset{(2)}{\Pi}_0 z_2(0). \tag{4.368}$$

等式 (4.368) 直接由条件 (4.363) 和 (4.366) 推出, 而等式 (4.367) 就是关于 T 的方程 (因为方程 (4.362) 和 (4.365) 以及定解条件 (4.363) 和 (4.366) 的右端都含有 T, 所以 $\overset{(1)}{Q}_0 z_1(\tau_T)$ 和 $\overset{(2)}{\Pi}_0 z_1(\tau_T)$ 也都依赖于 T).

为了确定 T, 我们在 (4.362) 和 (4.363) 中作变量替换 $\widetilde{z}_1(\tau_T)=\overset{(1)}{Q}_0 z_1(\tau_T), \widetilde{z}_2(\tau_T)=\varphi_3(T)+\overset{(1)}{Q}_0 z_2(\tau_T)$. 于是 (4.362), (4.363) 成为

$$\frac{d\widetilde{z}_1}{d\tau_T}=F(\widetilde{z}_2,T),\quad \frac{d\widetilde{z}_2}{d\tau_T}=\widetilde{z}_1, \tag{4.369}$$

$$\widetilde{z}_2(0)=\varphi_2(T),\quad \widetilde{z}_1(-\infty)=0,\quad \widetilde{z}_2(-\infty)=\varphi_3(T).$$

同样在 (4.365), (4.366) 中作变量替换 $\widetilde{\widetilde{z}}_1(\tau_T)=\overset{(2)}{\Pi}_0 z_1(\tau_T), \widetilde{\widetilde{z}}_2(\tau_T)=\varphi_1(T)+\overset{(2)}{\Pi}_0 z_2(\tau_T)$ 即得

$$\frac{d\widetilde{\widetilde{z}}_1}{d\tau_T}=F(\widetilde{\widetilde{z}}_2,T),\quad \frac{d\widetilde{\widetilde{z}}_2}{d\tau_T}=\widetilde{\widetilde{z}}_1, \tag{4.370}$$

$$\tilde{\tilde{z}}_2(0) = \varphi_2(T), \quad \tilde{\tilde{z}}_1(\infty) = 0, \quad \tilde{\tilde{z}}_2(\infty) = \varphi_1(T).$$

在新变量下方程 (4.367) 成为

$$\tilde{z}_1(0) = \tilde{\tilde{z}}_1(0) \tag{4.371}$$

容易看出, 无论是 (4.369) 或者 (4.370), 除了记号不同之外, 都是方程组 (4.357). 我们假设它对应于图 6 a) 的相轨线图, 于是值 $\tilde{z}_1(0)$ 对应于图 8 上的点 A, 而值 $\tilde{\tilde{z}}_1(0)$ 对应于垂直线 1 上的点 B, 由此即见条件 (4.371) 不能满足. 如果图 6 c) 的相轨线图成立, 同样条件 (4.371) 也不能满足. 因此, 只有图 6 b) 的相轨线图才能保证所需要的等式成立. 总之, 我们得出 T *应当是在相平面上形成胞腔*[①]的那个 t *值* 的结论. 这将写成下面的条件 IV, 但在此之前需要将方程 (4.371) 变成适当的形式.

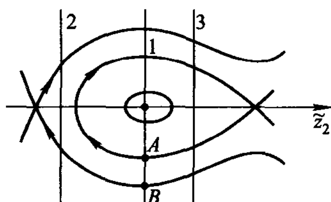


图 8　1 是对应于 $t = T$ 时相平面 $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ 上的直线 $\tilde{z}_2 = \varphi_2$, 2 和 3 是对应于 $t = 0$ 时相平面 $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$ 上直线 $\tilde{z}_2 = 0$ 的两个不同位置.

除此之外, 为了实现当 $t = 0$ 和 $t = 1$ 时每个半环相轨线图必须满足的对应于 §14 中条件 V(a) 和 V(b) 的确定条件, 在点 $t = 0$, 对于左半环必须保证满足条件 V(a), 而在点 $t = 1$, 对于右半环, 必须保证满足条件 V(b). 我们注意到, 对于左半环的条件 V(b) 和对于右半环的条件 V(a), 亦即在点 $t = T$ 处的条件, 由于当 $t = T$ 时胞腔的存在性条件本身而自动满足了. 实际上, 点 $(0, \varphi_2(T))$ 位于胞腔内部, 即直线 $\tilde{z}_2 = \varphi_2(T)$ 与从鞍点 $(0, \varphi_3(T))$ 出发到鞍点 $(0, \varphi_1(T))$ 的分界轨线相交. 换句话说, 值 $\tilde{z}_2 = \varphi_2(T)$ 是属于描述过鞍点 $(0, \varphi_3(T))$ 的流形 S^- 的函数 $\tilde{z}_1 = f(\tilde{z}_2)$ 的定义域, 而这个 S^- 与过鞍点 $(0, \varphi_1(T))$ 的流形 S^+ 是同一个, 它就是连结这两个鞍点的分界轨线. 关于 $\tilde{\tilde{z}}_2 = \varphi_2(T)$ 也是一样.

我们现在必须弄清楚如何才能使得左半环满足条件 V(a). 在对应于 $t = 0$ 的附加方程组 (它可以从 (4.361) 利用替换 $\tilde{z}_1(\tau_0) = \overset{(1)}{\Pi}_0 z_1(\tau_0)$, $z_2(\tau_0) = \varphi_3(0) + \overset{(1)}{\Pi}_0 z_2(\tau_0)$ 得到具有 (4.357) 的形式的方程组, 如果略掉 $\tilde{z}_i, i = 1, 2$ 上的记号 $\sim$, 并在 (4.357) 中令 $T = 0, \tau = \tau_0$, 则就得到所要的附加方程组) 的相平面上, 一般来说存在回线[②](见图 6 a) 或图 6 c)). 例如, 对于图 6 a) 的情形, 条件 V(a) 就意味着直线 $\tilde{z}_2 = 0$ 不应当

[①]亦即由上下两条对称的异宿轨线 2 和左右两个鞍点 A_1 和 A_3 组成的闭环线, 并且由过中心奇点 A_2 的垂线分成左半环和右半环 —— 译者注.

[②]即由一个鞍点和一根当 $\tau \to \pm\infty$ 时都趋于这个鞍点的同宿轨线组成的的闭环线 —— 译者注.

位于环线的外面, 否则这根直线 (即图 8 上的直线 2)[①]就不与对应于 $(0,\varphi_3(0))$ 和几何上表示这条环线的流形 S^+ 相交. 因此, 为了满足条件 V(a) 就要求直线 $\widetilde{z}_2=0$ (即图 8 上的直线 3) 应与环线相交. 当 $t=1$ 时也应当满足类似的要求, 这就是:

III. *假设在与方程组*

$$\frac{d\widetilde{z}_1}{d\tau_0}=F(\widetilde{z}_2,0),\quad \frac{d\widetilde{z}_2}{d\tau_0}=\widetilde{z}_1$$

对应的相平面上, 直线 $\widetilde{z}_2=0$ 与当 $\tau_0\to\infty$ 时进入鞍点 $(0,\varphi_3(0))$ 的分界线相交.

假设在与方程组

$$\frac{d\widetilde{\widetilde{z}}_1}{d\tau_0}=F(\widetilde{\widetilde{z}}_2,0),\quad \frac{d\widetilde{\widetilde{z}}_2}{d\tau_0}=\widetilde{\widetilde{z}}_1$$

对应的相平面上, 直线 $\widetilde{\widetilde{z}}_2=0$ 与当 $\tau_0\to-\infty$ 时进入鞍点 $(0,\varphi_1(1))$ 的分界线相交.

我们现在来写出方程 (4.371) 的另一个形式. 等式 $\widetilde{z}_1=f(\widetilde{z}_2)$ 就是方程组 (4.369)(或 (4.357)) 当 $\tau_T=-\infty$ 时从点 $(0,\varphi_3(T))$ 出发的分界线方程. 于是在 (4.358) 中令 $C=\int_{\varphi_3(T)}^{\varphi_2(T)}F(z,T)dz$ 即得 $f(\widetilde{z}_2)$ 的表达式

$$\widetilde{z}_1 - -\sqrt{2}\sqrt{\int_{\varphi_3(T)}^{\widetilde{z}_2}F(z,T)dz}.$$

同样, 对于方程组 (4.370) 当 $\tau_T=\infty$ 时进入点 $(0,\varphi_1(T))$ 的分界线有

$$\widetilde{\widetilde{z}}_1=-\sqrt{2}\sqrt{\int_{\varphi_1(T)}^{\widetilde{\widetilde{z}}_2}F(z,T)dz}.$$

因此由方程 (4.371) 即得

$$-\sqrt{2}\sqrt{\int_{\varphi_3(T)}^{\varphi_2(T)}F(z,T)dz}=-\sqrt{2}\sqrt{\int_{\varphi_1(T)}^{\varphi_2(T)}F(z,T)dz}.$$

因而得到

$$\int_{\varphi_3(T)}^{\varphi_2(T)}F(z,T)dz=\int_{\varphi_1(T)}^{\varphi_2(T)}F(z,T)dz, \tag{4.372}$$

这与胞腔条件 (4.359) 完全一样. 所以, 为了在区间 $[0,1]$ 中的某一点存在保证从根 $\varphi_3(t)$ 到根 $\varphi_1(t)$ 转移的胞腔, 必须满足如下条件:

[①]不过这时应把图 8 看成对应于在点 $t=0$ 处附加方程组的相图, 而不是上面所认为的关于在点 $t=T$ 处附加方程组的相图, 这完全是为了节约插图.

IV. 假设方程 (4.372) 关于 T 有解 $T - T^0$, 且设 $0 < T^0 < 1$.

我们考虑了像在图 7 上那种类型的渐近解的形式构造条件, 现在我们来说明它实际存在的充分条件. 表达式

$$B(T) \equiv \overset{(1)}{Q}_0 z_1(0) - \overset{(2)}{\Pi}_0 z_1(0)$$

当 $T = T^0$ 时变成零. 设 $B(T)$ 在通过 $T = T^0$ 时改变符号. 表达式 $B(T)$ 在准确到 $O(\mu)$ 的量阶上是 z_1 在点 $t = T$ 的左半部分和右半部分的值的差, 这时 z_2 等于 $\varphi_2(T)$ (无论是左半部分还是右半部分). 由此得出, 在点 T^0 的邻域中存在 $T(\mu)$, 使得在 $t = T(\mu)$ 的左半部分和右半部分的值之差为零, 亦即左半部分与右半部分既对 z_2, 也对 z_1 保持连续地连接起来; 换句话说, 确实存在问题 (4.355) 像图 7 上形式的解.

利用将 (4.371) 变成 (4.372) 的变换可以将量 $B(T)$ 变成明显依赖于 T 的形式

$$B(T) = \int_{\varphi_3(T)}^{\varphi_2(T)} F(z,T)dz - \int_{\varphi_1(T)}^{\varphi_2(T)} F(z,T)dz = \int_{\varphi_3(T)}^{\varphi_1(T)} F(z,T)dz.$$

由此容易看出, 从几何上来说 $B(T)$ 符号的改变, 就是相图的形式从图 6 中的 a) 变成 c) 或者从 c) 变成 a). 而为了保证当通过 $T = T^0$ 时 $B(T)$ 改变符号, 可用如下条件:

$$\text{V.} \quad B'(T^0) = \frac{d}{dT}\int_{\varphi_3(T)}^{\varphi_1(T)} F(z,T)dz\bigg|_{T=T^0} \neq 0.$$

将得到的结果写成如下定理:

定理 4.5 当满足条件 I~V 时, 边值问题 (4.355), (4.356) 的解存在, 且满足下列极限等式

$$\lim_{\mu\to 0} z_2(t,\mu) = \begin{cases} \varphi_3(t), & \text{当 } 0 < t < T^0, \\ \varphi_1(t), & \text{当 } T^0 < t < 1. \end{cases} \tag{4.373}$$

$$\lim_{\mu\to 0} z_1(t,\mu) = 0, \ \text{当 } 0 < t < T^0,\ T^0 < t < 1.$$

注 1. 也可以存在着 $z_2(t,\mu)$ 在 $(0,T^0)$ 上趋于 $\varphi_1(t)$, 而在 $(T^0,1)$ 上趋于 $\varphi_3(t)$ 的解, 这时定理的条件和叙述, 除了在 III 中将 $\varphi_3(0), \varphi_1(1)$ 换成 $\varphi_1(0), \varphi_3(1)$ 以及在 (4.373) 中 $\varphi_3(t)$ 和 $\varphi_1(t)$ 相互对换外, 其他仍然不变.

2. 如果在区间 $0 < T < 1$ 中有几次形成胞腔, 亦即 $B(T)$ 有几次变成零, 那么可能存在含有几个转点的解.

3. 问题 (4.355), (4.356) 的解基本上不是唯一的, 上述的解都可能存在. 此外, 同时还可能存在 $z_2(t,\mu)$ 只趋于 $\varphi_1(t)$ 或者只趋于 $\varphi_3(t)$ 的解, 亦即在 §14 中所描述的没有转点的解.

4. 上述结果可以推广到 (4.355) 中含有变量 y 类型 (慢变量) 的方程组, 对此我们只作如下简单的说明.

设有方程组 (y 为 m 维向量)

$$\mu^2\frac{d^2z_2}{dt^2}=F(z_2,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=f(z_2,y,t)$$

以及与 (4.356) 一样的条件和 m 个 y 的定解条件: $y(0,\mu)=y^0$. 设方程 $F(z,y,t)=0$ 有根 $z=\varphi_i(y,t), i=1,2,3$. 我们从方程组

$$\frac{d\overline{y}_3}{dt}=f(\varphi_3(\overline{y}_3,t),\overline{y}_3,t),\quad \overline{y}_3(0)=y^0$$

求出 $\overline{y}_3(t)$, 并记 $\varphi_i(t)=\varphi_i(\overline{y}_3,t)$. 于是从 φ_3 到 φ_1 的转点 T^0, 就由方程

$$\int_{\varphi_3(T)}^{\varphi_1(T)}F(z,\overline{y}_3(T),T)dz=0$$

确定. 利用 $T=T^0$, 我们用方程组

$$\frac{d\overline{y}_1}{dt}=f(\varphi_1(\overline{y}_1,t),\overline{y}_1,t),\quad \overline{y}_1(T^0)=\overline{y}_3(T^0)$$

确定 $\overline{y}_1(t)$. 在某些类似于定理 4.5 条件的辅助条件之下, 可以保证满足下列极限等式的解的存在性:

$$\lim_{\mu\to 0}y(t,\mu)=\begin{cases}\overline{y}_3(t), & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant T^0,\\ \overline{y}_1(t), & \text{当 } T^0\leqslant t\leqslant 1.\end{cases}$$

$$\lim_{\mu\to 0}z_2(t,\mu)=\begin{cases}\varphi_3(\overline{y}_3(t),t), & \text{当 } 0<t<T^0,\\ \varphi_1(\overline{y}_1(t),t), & \text{当 } T^0<t<1.\end{cases}$$

上述考虑的从鞍点到鞍点的现象首先是由 Ю. П. Боглаев [5] 进行研究的, 在他的工作中考虑了方程组 (4.355) 及含有慢变量的更一般形式. 在解的存在性研究中, 他应用了一些更为一般但确定意义的作为极大值原理的稳定性准则.

例子.

$$\mu\frac{dz_1}{dt}=(z_2+1)(z_2-1.5)(z_2-t),\quad \mu\frac{dz_2}{dt}=z_1,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

$$z_2(0,\mu)=0,\quad z_2(1,\mu)=0.$$

在这个例子中, $\varphi_1=-1,\varphi_2=t,\varphi_3=1.5,T^0=0.25$, 因而对所求的解有

$$\lim_{\mu\to 0}z_2(t,\mu)=\overline{z}_2(t)\equiv\begin{cases}1.5, & \text{当 } 0<t<0.25,\\ -1, & \text{当 } 0.25<t<1.\end{cases}\tag{4.374}$$

对于如下的退化结构

$$\overline{z}_2(t)=\begin{cases}1, & \text{当 } 0<t<0.25,\\ 1.5, & \text{当 } 0.25<t<1.\end{cases}\tag{4.375}$$

在 $t=1$ 处并不满足定理 4.5 的条件 III. 如果用 $z_2(1,\mu)=1$ 代替条件 $z_2(1,\mu)=0$, 那么对于两个退化结构, 即 (4.374) 和 (4.375) , 都满足定理 4.5 的条件, 从而保证存在两个解, 其 z_2 分量分别趋于这两个退化解.

练习 验证这些结论.

在 (4.357) 中可能出现对任何 T 都有胞腔的情况, 于是, 这时也可能存在像图 7 所描述的带有转点 T^0 的解, 为了找到 T^0 可以利用同样的设想, 但是应当代替 (4.360) 和 (4.364), 取精确到 $O(\mu^2)$ 的渐近表达式. 决定 T^0 的方程将比 (4.372) 更复杂 ((4.372) 这时成了恒等式), 亦即 (下面的公式是对于 $\varphi_2(t) \equiv 0$ 的)

$$\dot{\varphi}_i(T) + \frac{1}{\sqrt{2\int_{\varphi_i(T)}^{0} F(z,T)dz}} \cdot \int_0^{\varphi_i(T)} \frac{\int_{\varphi_i(T)}^{z}[\dot{\varphi}_i(T)F_{z_2}(z_2,T) + F_t(z_2,T)]dz_2}{\sqrt{2\int_{\varphi_i(T)}^{z} F(z_2,T)dz_2}} dz \Bigg|_{i=1}^{i=3} = 0 \tag{4.376}$$

这个方程是在 [18] 工作中得到的.

如果 (4.355) 为定常系统 ($\varphi_i(t) =$ 常数, 从而 $\dot{\varphi}_i(t) \equiv 0, F_t(z_2,t) \equiv 0$), 那么方程 (4.376) 成为恒等式. 这时问题 (4.355), (4.356) 也可能有转点解, 但应从另外的设想才能找到这些转点. 在文章 [22], [23] 中研究了定常系统.

在 [22] 工作中研究了方程组

$$\mu \frac{dz}{dt} = Z(z)$$

这里 z, Z 都是二维向量. 假设在相平面 z 上存在图 6 (c) 型的胞腔, 但现在它关于 z_1, z_2 轴的位置已是任意分布了 (见图 9). 对于像图 7 上那种类型解的转点 T, 在零次近似是由公式①

$$T^0 = \frac{\lambda_1^+}{\lambda_1^+ - \lambda_3^-}$$

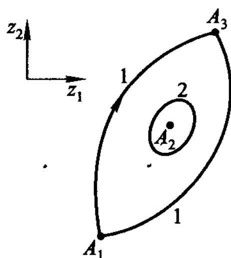


图 9 A_1, A_3 是鞍点, A_2 是中心, 1 是分界轨线, 2 是围绕中心的闭轨线之一.

①在 [22] 中不是考虑条件 (4.356), 而是周期性条件, 但是关于转点的方程在两种情况下都是同一个.

确定的, 这里 φ_1 和 φ_3 是平行于 t 轴的直线, 而其中 λ_1^+ 是对应于 φ_1 的特征方程的正根, λ_3^- 是对应于 φ_3 的特征方程的负根. 在 [22] 中还得到对 T^0 在 $O(\mu)$ 阶的修正.

5. 关于从一个根转移到另一个根的其他类型的注　上述从一个根转移到另一个根的现象, 或者称之为*跳跃现象*, 并不限于上面仔细讨论的那些情形. 跳跃现象往往由于下述原因而出现. 我们考虑最简单的一维情形

$$\mu\frac{dz}{dt} = F(z,t).$$

设方程 $F(z,t)=0$ 有三个根: $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ 和 $\varphi_3(t)$, 并设在点 $t=T$ 处, $\varphi_2(t)$ 和 $\varphi_3(t)$ 连接起来. 我们假设分支 $\varphi_3(t)$ 是右稳定的, 以及根 $\varphi_1(t)$ 也是右稳定的, 而分支 $\varphi_2(t)$ 为左稳定的. 我们考虑初值问题 $z(0,\mu)=z^0$, 这里 z^0 如图 10 所示那样选取. 按照第二章的理论, 对于 $t>0$ 对应的积分曲线当 $\mu\to 0$ 时逼近于 $\varphi_3(t)$. 而且只要曲线不进入对应于 $t=T$ 的点 A 的邻域, 在第二、三章发展起来的理论仍然正确. 当 $t=T$ 时有 $\varphi_2=\varphi_3$ 及 $F_z(\varphi_2(T),T)=F_z(\varphi_3(T),T)=0$. 因此第二、三章的理论就无法对积分曲线后面性质的问题给出解答. 对曲线在点 $t=T$ 邻域中更仔细的研究说明, 随着 t 的增加, 曲线由于惯性而离开 $\varphi_3(t)$ 而向右拓展, 而且进入属于右稳定根 $\varphi_1(t)$ 的影响域, 且由于快速地转移到 $\varphi_1(t)$ 的邻域, 以后就停留在这个邻域里. 取极限即得间断解

$$\lim_{\mu\to 0} z(t,\mu) = \begin{cases} \varphi_3(t), & 当\ 0<t<T, \\ \varphi_1(t), & 当\ t>T; \end{cases}$$

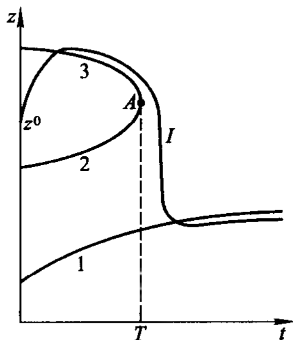


图 10　1, 2, 3 是 $z=\varphi_i(t)$, $i=1,2,3$, 的图形, I 是 $z=z(t,\mu)$ 的图形.

表面上看好像是上面研究过的情形, 这里也出现内部层, 但是由于与 $F_z(z,t)$ 变成零有关的奇异性, 在此内部层的渐近解结构比 (4.360) 和 (4.364) 要复杂得多, 有关这方面的研究已超出本书范围 (有兴趣的读者可参看Л. С. 庞特里亚金 (Л. С. Понтрягин) 和 Е. Ф. 米先柯 (Е. Ф. Мищенко) 的工作 [49, 43], 他们对相当一般的方程组仔细地研究了上述的跳跃现象).

§16. 产生无穷大解值的边值问题

1. 最简单例子的分析 我们考虑线性方程式 $\mu y'' = ay' + 1$ ($a < 0$ 为常数) 的等价方程组

$$\mu z' = az + 1, \quad y' = z, \tag{4.377}$$

及边界条件

$$y(0, \mu) = y(1, \mu) = 0. \tag{4.378}$$

我们来试一试看是否能够应用上面有关渐近稳定性情形的格式来解决这个问题, 亦即 §13 的格式或者 §15 中第 2 段的格式. 不难相信, §13 格式的可应用性条件并不满足, 因为方程组 $R_0 = 0$ 关于 x_0 不可解. 实际上, (4.378) 的零次近似为 $y_0 = 0, \overline{y}_0(1) = 0$, 而由于 $y_0 = \overline{y}_0(0)$, 因此这就表示退化方程 $\overline{y}_0' = -\dfrac{1}{a}$ 的解应当在 $t = 0$ 和 $t = 1$ 都为零; 但这是不可能的, 因当 $t = 0$ 时 $\overline{y}_0(0) = 0$ 的退化解为 $\overline{y}_0(t) = -\dfrac{t}{a}$, 显然它当 $t = 1$ 时不为零.

§15 的格式也不能用, 因为在本例中的函数 F 关于 z 是线性的 (参看定理 4.3 的注 3). 因此问题 (4.377), (4.378) 解的渐近性质显然与 §13 和 §15 所讨论的不同.

问题 (4.377), (4.378) 的精确解为

$$\begin{aligned} y(t, \mu) &= \frac{1}{a(1 - \exp(a/\mu))} - \frac{\exp(at/\mu)}{a(1 - \exp(a/\mu))} - \frac{t}{a}, \\ z(t, \mu) &= y'(t, \mu) = -\frac{1}{\mu}\frac{\exp(at/\mu)}{a(1 - \exp(a/\mu))} - \frac{1}{a}. \end{aligned} \tag{4.379}$$

从 (4.379) 即见,

$$z(0, \mu) = -\frac{1}{\mu}\frac{1}{a(1 - \exp(a/\mu))} - \frac{1}{a},$$

亦即当 $\mu \to 0$ 时 $z(0, \mu)$ 的值为无穷大量. 由此建立这样一个概念, 对上述问题无论讲过的哪一个格式都不能用, 因为这些格式只适用于 $z(t, \mu)$ 为有界量的情形.

上述例子说明, 为了研究类似于上述例子类型的边值问题, 必须考虑构造当 $\mu \to 0$ 时 z 的初值为无穷大量的初值问题的渐近解.

于是, 如果方程组对 z 是线性的, 且初始条件为

$$z(0, \mu) = \frac{z_{-1}}{\mu}, \quad y(0, \mu) = y_0, \tag{4.380}$$

那么对于这种类型的初值问题的解, 还是可以构造像第三章那种类型的渐近解, 唯一不同的是这时对于 $z(t, \mu)$ 的边界级数是从 μ^{-1} 阶项开始的 (参看 [16]).

2. z 有无穷大初值的初值问题的渐近解 我们只限于讨论与一个二阶拟线性方程式等价的方程组

$$\mu\frac{dz}{dt} = A(y, t)z + B(y, t), \quad \frac{dy}{dt} = z, \quad 0 \leqslant t \leqslant T; \tag{4.381}$$

为了下面应用于边值问题, 我们给出比 (4.380) 稍微一般的初始条件

$$z(0,\mu)=\frac{z_{-1}}{\mu}+z_0+\mu z_1+\cdots,\quad y(0,\mu)=y_0+\mu y_1+\cdots. \tag{4.382}$$

我们找问题 (4.381), (4.382) 的解像在第三章那样形式的渐近展开, 不过要考虑到上述关于 $z(t,\mu)$ 的边界级数的差别, 亦即

$$z(t,\mu)=\overline{z}_0(t)+\mu\overline{z}_1(t)+\cdots+\frac{1}{\mu}\Pi_{-1}z(\tau)+\Pi_0 z(\tau)+\cdots,\ \tau=\frac{t}{\mu}, \tag{4.383}$$

$$y(t,\mu)=\overline{y}_0(t)+\mu\overline{y}_1(t)+\cdots+\Pi_0 y(\tau)+\mu\Pi_1 y(\tau)+\cdots;$$

我们按照第三章同样的规则来决定这些展开式的系数, 即由下列方程确定:

$$\frac{d\Pi_{k-1}z}{d\tau}=\Pi_{k-1}(Az+B),\quad \frac{d\Pi_k y}{d\tau}=\Pi_{k-1}z,\quad k=0,1,\cdots, \tag{4.384}$$

$$0=A(\overline{y}_0,t)\overline{z}_0+B(\overline{y}_0,t),\quad \frac{d\overline{y}_0}{dt}=\overline{z}_0, \tag{4.385}$$

$$\frac{d\overline{z}_{k-1}}{dt}=\overline{(Az+B)}_k,\quad \frac{d\overline{y}_k}{dt}=\overline{z}_k,\quad k=1,2,\cdots. \tag{4.386}$$

这里不同于第三章的是关于 $\Pi_k y(\tau)$ 和 $\Pi_{k-1}z(\tau)$ 的方程组已经不能分开来求解, 特别对 $k=0$ 有

$$\frac{d\Pi_{-1}z}{d\tau}=A(\overline{y}_0(0)+\Pi_0 y,0)\Pi_{-1}z,\quad \frac{d\Pi_0 y}{d\tau}=\Pi_{-1}z. \tag{4.387}$$

像通常那样, 我们要求

$$\Pi_0 y(\infty)=0, \tag{4.388}$$

于是由 (4.387) 的第二个方程即得

$$\Pi_0 y(\tau)=-\int_\tau^\infty \Pi_{-1}z(s)ds, \tag{4.389}$$

但是与第三章中相似的等式不同的是 (4.389) 并没有求出 $\Pi_0 y(\tau)$, 因为 $\Pi_{-1}z(\tau)$ 暂时尚不知道.

为了下面研究的方便, 我们利用新的变量

$$\widetilde{y}=\overline{y}_0(0)+\Pi_0 y \tag{4.390}$$

(特别, 这里 $\overline{y}_0(0)$ 暂时也不知道), 于是由 (4.378) 即得

$$\frac{d\Pi_{-1}z}{d\widetilde{y}}=A(\widetilde{y},0). \tag{4.391}$$

从 (4.382) 和 (4.383) 可得

$$\Pi_{-1}z(0)=z_{-1},\quad \overline{y}_0(0)+\Pi_0 y(0)=y_0,$$

由此及 (4.390) 即知

$$\widetilde{y}(0) = y_0. \tag{4.392}$$

据此对 (4.391) 积分即得

$$\Pi_{-1}z = z_{-1} + \int_{y_0}^{\widetilde{y}} A(y,0)dy. \tag{4.393}$$

将此代入 (4.387) 的第二个方程, 并注意到 $\dfrac{d\Pi_0 y}{d\tau} = \dfrac{d\widetilde{y}}{d\tau}$ 即得方程

$$\frac{d\widetilde{y}}{d\tau} = z_{-1} + \int_{y_0}^{\widetilde{y}} A(y,0)dy, \tag{4.394}$$

按照第二、三章的说法, 这个方程可以称为附加方程 (见 (2.24)). 令其右端为零即可求出这个方程的奇点

$$z_{-1} + \int_{y_0}^{\widetilde{y}} A(y,0)dy = 0. \tag{4.395}$$

I. *假设方程 (4.395) 有解 $\widetilde{y} = \widetilde{y}_0$, 而且 $A(\widetilde{y}_0, 0) < 0$.*

由此假设立即可得, 奇点 $\widetilde{y} = \widetilde{y}_0$ 当 $\tau \to \infty$ 时是渐近稳定的.

II. *假设值 y_0 属于奇点 $\widetilde{y} = \widetilde{y}_0$ 的影响域.*

于是有

$$\lim_{\tau\to\infty} \widetilde{y}(\tau) = \widetilde{y}_0.$$

由此即见, 若令

$$\overline{y}_0(0) = \widetilde{y}_0 \tag{4.396}$$

则由 (4.390) 可知 $\Pi_0 y$ 满足条件 (4.388).

经过求积从 (4.394) 可以得到 $\widetilde{y}$ (作为 τ 的隐函数), 因此由 (4.393) 即得 $\Pi_{-1}z(\tau)$, 而由 (4.390) 即得 $\Pi_0 y(\tau)$. 我们注意到, 这里不同于第三章的是 $\Pi_0 y(\tau)$ 不恒等于零, 而初值 $\overline{y}_0(0)$ 与 y_0 的差值为量 $\widetilde{y}_0 - y_0 \equiv \Delta y_0$, 由 (4.389), (4.390) 及 (4.392) 这个量可写成

$$\Delta y_0 = \int_0^{\infty} \Pi_{-1}z(\tau)d\tau. \tag{4.397}$$

III. *设具有初始条件 (4.396) 的方程组 (4.385) 在区间 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上有解 $\overline{y}_0(t), \overline{z}_0(t)$.*

IV. *假设对 $0 \leqslant t \leqslant T$ 有 $A(\overline{y}_0(t), t) < 0$. 这里条件起了像第三章中稳定性条件 (3.22) 的作用.*

我们在 (y,t) 平面上给出由两条曲线段组成的曲线 L_0 如下:

$$L_{01} = \{(y,t) : y = \widetilde{y}(\tau),\ 0 \leqslant \tau < \infty; t = 0\},$$

$$L_{02} = \{(y,t) : y = \overline{y}_0(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T\}.$$

V. 假设函数 $A(y,t)$ 和 $B(y,t)$ 在曲线 L_0 的某个 δ-管中对 y 和 t 有直到包括 $(n+2)$ 阶在内的连续偏导数.

为了确定展开式 (4.383) 中随后各项, 我们必须利用从 $k=1$ 开始的线性方程组 (4.384) 和 (4.386).

对任意 $k \geqslant 1$ 考虑方程组 (4.384), 将其详细写出来即为

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_{k-1}z}{d\tau} = A(\tau)\Pi_{k-1}z + A_y(\tau)\Pi_{-1}z(\tau)(\overline{y}_k(0) + \Pi_k y) + \psi_{k-1}(\tau), \\ \dfrac{d\Pi_k y}{d\tau} = \Pi_{k-1}z, \end{cases} \tag{4.398}$$

这里 $A(\tau) = A(\overline{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0)$, $A_y(\tau) = A_y(\overline{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0)$, $\psi_{k-1}(\tau)$ 是用前面号码的 $\Pi_i x(\tau)$ 所表示, 而 $\overline{y}_k(0)$ 暂时未知. 也像在方程组 (4.387) 的讨论中那样, 作如下的变量替换

$$\widetilde{y}_k = \overline{y}_k(0) + \Pi_k y, \tag{4.399}$$

于是方程组 (4.398) 就变成

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_{k-1}z}{d\tau} = A(\tau)\Pi_{k-1}z + A_y(\tau)\Pi_{-1}z(\tau)\widetilde{y}_k + \psi_{k-1}(\tau), \\ \dfrac{d\widetilde{y}_k}{d\tau} = \Pi_{k-1}z. \end{cases} \tag{4.400}$$

从 (4.383) 可得 $\Pi_{k-1}z(\tau), \widetilde{y}_k(\tau)$ 的初始条件

$$\Pi_{k-1}z(0) = z_{k-1} - \overline{z}_{k-1}(0), \tag{4.401}$$

$$\widetilde{y}_k(0) = y_k. \tag{4.402}$$

求出问题 (4.400) ~ (4.402) 的解 $\Pi_{k-1}z(\tau), \widetilde{y}_k(\tau)$ 之后, 利用 (4.398) 的第二个方程, 即可用等式

$$\Pi_k y(\tau) = -\int_\tau^\infty \Pi_{k-1}z(s)ds \tag{4.403}$$

求得 $\Pi_k y(\tau)$. 下面将证明 Π-函数满足指数式估计, 从而推出在 (4.389), (4.403) 以及后面一些公式中的广义积分的收敛性.

在 (4.399) 中令 $\tau = 0$, 并利用 (4.402) 和 (4.403) 即得

$$\overline{y}_k(0) = y_k + \int_0^\infty \Pi_{k-1}z(\tau)d\tau. \tag{4.404}$$

从方程组 (4.386) 及初始条件 (4.404) 即可求得解 $\overline{y}_k(t)$, $\overline{z}_k(t)$.

用同样的方法我们求出了展开式 (4.383) 中包括号码 n 在内的项 (条件 V 容许这样做). 我们注意到, 在从方程组 (4.384) 当 $k = n+1$ 时求出 $\Pi_n z(\tau)$ 的同时, 也得

到了将在余项估计时用得着的函数 $\widetilde{y}_{n+1}(\tau)$. 像以前那样, 我们用 $Z_n(t,\mu)$ 和 $Y_n(t,\mu)$ 表示级数 (4.383) 直到包括第 n 项的部分和.

定理 4.6 当满足条件 I ~V 时, 存在常数 $\mu_0>0$ 和 $c>0$, 使得当 $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时, 问题 (4.381), (4.382) 存在唯一解 $z(t,\mu)$, $y(t,\mu)$, 且对 $0\leqslant t\leqslant T$ 满足不等式

$$|x(t,\mu)-X_n(t,\mu)|\leqslant c\mu^{n+1}. \tag{4.405}$$

注 1. 如果只为了证明存在性和唯一性, 那么在条件 V 中只须取 $n=0$.

2. 我们注意到在所论情况下, $y(t,\mu)$ 当 $\mu\to 0$ 时的性质类似于在初值问题 (3.18), (3.19) 中 $z(t,\mu)$ 的性质, 即在 $t=0$ 时 $y(t,\mu)$ 很快地从值 y_0 变到接近于值 $\widetilde{y}_0$. 解的 y 分量出现这种所谓的初始跳跃是基于 z 的无穷大初值的. 这个跳跃量 Δy_0 由公式 (4.397) 给出.

证明 定理 4.6 的证明是按照证明第三章的定理 3.1 时同样的步骤进行的, 只是在细节上有些差别.

我们首先证明 $\Pi_{k-1}z(\tau)$, $\Pi_k y(\tau)$, $k=0,1,2,\cdots$, 满足 (3.58) 型的指数式估计

$$|\Pi_k x(\tau)|\leqslant c\exp(-\kappa\tau),\ \text{当}\ \tau\geqslant 0. \tag{4.406}$$

我们从方程 (4.394) 出发, 这是一个像附加方程 (2.24) 的方程. 由于 (4.390), 这个方程可以写成

$$\frac{d\Pi_0 y}{d\tau}=z_{-1}+\int_{y_0}^{\widetilde{y}_0+\Pi_0 y}A(y,0)dy,$$

由此看出它完全类似于第三章关于 $\Pi_0 z(\tau)$ 的方程 (3.43). 因此利用引理 3.1 可以断定在所论情况下, $\Pi_0 y(\tau)$ 满足 (4.406), 其次, (4.387) 的第一个方程完全类似于, 例如, $\Pi_1 z(\tau)$ 的方程 (3.74) (而且还是 (3.74) 的特殊情形). 在 (4.387) 中的 $\Pi_0 y(\tau)$ 起了 (3.74) 中 $\Pi_0 z(\tau)$ 的作用, 因此由同一条引理 3.1, $\Pi_{-1}z(\tau)$ 也满足 (4.406) 的估计. □

我们现在转到方程组 (4.400). 在对较小号码的 Π-函数都满足不等式 (4.406) 的假设下, 像在引理 3.1 中对于 $\Pi_{k-1}f(\tau)$ 那样 (参看 (3.80)), 对 $\tau\geqslant 0$ 可以得到 $\psi_{k-1}(\tau)$ 的估计 $|\psi_{k-1}(\tau)|\leqslant c\exp(-\kappa\tau)$. 从 (4.400) 的第二个方程和初始条件 (4.402) 有

$$\widetilde{y}_k(\tau)=\dot{y}_k+\int_0^\tau \dot{\Pi}_{k-1}z(s)ds.$$

将此代入 (4.400) 的第一个方程即得关于 $\Pi_{k-1}z(\tau)$ 的积分 - 微分方程

$$\frac{d\Pi_{k-1}z}{d\tau}=A(\tau)\Pi_{k-1}z+A_y(\tau)\Pi_{-1}z(\tau)\int_0^\tau \Pi_{k-1}z(s)ds+\widetilde{\psi}_{k-1}(\tau) \tag{4.407}$$

这里 $\widetilde{\psi}_{k-1}(\tau)=\psi_{k-1}(\tau)+A_y(\tau)\Pi_{-1}z(\tau)y_k$ 有像 $\psi_{k-1}(\tau)$ 同样的估计. 将初值问题

(4.407), (4.401) 写成如下的等价积分方程

$$\Pi_{k-1}z(\tau) = (z_{k-1} - \overline{z}_{k-1}(0))\exp(\int_0^\tau A(s)ds)$$
$$+\int_0^\tau \exp(\int_s^\tau A(p)dp)[A_y(s)\Pi_{-1}z(s)\int_0^s \Pi_{k-1}z(p)dp + \widetilde{\psi}_{k-1}(s)]ds$$

并将其重写成

$$\Pi_{k-1}z(\tau) = \int_0^\tau K(\tau,s)\Pi_{k-1}z(s)ds + \varphi_{k-1}(\tau), \tag{4.408}$$

其中

$$K(\tau,s) = \int_s^\tau \exp(\int_p^\tau A(p)dp)A_y(p)\Pi_{-1}z(p)dp,$$

$$\varphi_{k-1}(\tau) = (z_{k-1} - \overline{z}_{k-1}(0))\exp(\int_0^\tau A(s)ds) + \int_0^\tau \exp(\int_s^\tau A(p)dp)\widetilde{\psi}_{k-1}(s)ds.$$

由于不等式

$$\exp(\int_p^\tau A(p)dp) \leqslant c\exp(-\kappa(\tau - p)),\ 对\ 0 \leqslant p \leqslant \tau,$$

因此 $K(\tau,s)$ 和 $\varphi_{k-1}(\tau)$ 满足如下估计:

$$|K(\tau,s)| \leqslant c\exp(-\kappa\tau), \quad |\varphi_{k-1}(\tau)| \leqslant c\exp(-\kappa\tau),\ 0 \leqslant s \leqslant \tau. \tag{4.409}$$

我们证明, 对于核 $K(\tau,s)$ 的预解式 $R(\tau,s)$, 成立同样的估计:

$$|R(\tau,s)| \leqslant c\exp(-\kappa\tau),\ 对\ 0 \leqslant s \leqslant \tau. \tag{4.410}$$

事实上, $R(\tau,s)$ 定义为 (见 §10 第 2 段)

$$R(\tau,s) = \sum_{k=1}^{\infty} K_k(\tau,s), \tag{4.411}$$

其中

$$K_1(\tau,s) = K(\tau,s), \quad K_k(\tau,s) = \int_s^\tau K_{k-1}(\tau,p)K(p,s)dp,\ k = 2,3,\cdots. \tag{4.412}$$

我们用归纳法证明 $K_k(\tau,s)$, $k = 1,2,\cdots$, 满足不等式

$$|K_k(\tau,s)| \leqslant c\exp(-\kappa\tau)\frac{[\frac{c}{\kappa}(\exp(-\kappa s) - \exp(-\kappa\tau))]^{k-1}}{(k-1)!},\ 0 \leqslant s \leqslant \tau. \tag{4.413}$$

对于 $k = 1$, 由于 (4.409) 这个不等式是正确的. 我们假设对于 $K_{k-1}(\tau,s)$ 这个不等式也成立, 亦即

$$|K_{k-1}(\tau,s)| \leqslant c\exp(-\kappa\tau)\frac{[\frac{c}{\kappa}(\exp(-\kappa s) - \exp(-\kappa\tau))]^{k-2}}{(k-2)!}. \tag{4.414}$$

利用 (4.409) 和 (4.414), 从 (4.412) 中 $K_k(\tau,s)$ 的表达式即得

$$
\begin{aligned}
|K_k(\tau,s)| &\leqslant c\exp(-\kappa\tau)\int_s^\tau \frac{[\frac{c}{\kappa}(\exp(-\kappa p)-\exp(-\kappa\tau))]^{k-2}}{(k-2)!}c\exp(-\kappa p)dp \\
&= c\exp(-\kappa\tau)\int_\tau^s d\left\{\frac{[\frac{c}{\kappa}(\exp(-\kappa p)-\exp(-\kappa\tau))]^{k-1}}{(k-1)!}\right\} \\
&= c\exp(-\kappa\tau)\frac{[\frac{c}{\kappa}(\exp(-\kappa s)-\exp(-\kappa\tau))]^{k-1}}{(k-1)!},
\end{aligned}
$$

亦即 (4.413) 成立. 由于 (4.413), 现在从 (4.411) 立即得到对 $R(\tau,s)$ 的估计式 (4.410).

方程 (4.408) 的解可以写成 (见 (3.57))

$$\Pi_{k-1}z(\tau)=\varphi_{k-1}(\tau)=\int_0^\tau R(\tau,s)\varphi_{k-1}(s)ds,$$

由此及 (4.409), (4.410) 直接得出对 $\Pi_{k-1}z(\tau)$ 的估计式 (4.406). 于是由 (4.403) 立即得到对 $\Pi_k y(\tau)$ 的 (4.406) 估计式. 从而证明了对 Π-函数的指数式估计.

我们注意到函数 $\widetilde{y}_k=\overline{y}_k(0)+\Pi_k y(\tau)=y_k+\int_0^\tau \Pi_{k-1}z(s)ds$ 对 $\tau\geqslant 0$ 是有界的.

我们现在转到定理 4.6 本身的证明. 令

$$
\begin{cases}
u(t,\mu)=z(t,\mu)-Z_n(t,\mu), \\
v(t,\mu)=y(t,\mu)-Y_n(t,\mu)-\mu^{n+1}\widetilde{y}_{n+1}(\tau).
\end{cases}
\tag{4.415}
$$

我们注意到这里的第二个方程与定理 3.1 所引进的 $v(t,\mu)$ 有些不同, 即在此多加了一项 $-\mu^{n+1}\widetilde{y}_{n+1}(\tau)$ (其意义将在下面说明). 我们记

$$H_1(t,\mu)=A(Y_n+\mu^{n+1}\widetilde{y}_{n+1},t)Z_n+B(Y_n+\mu^{n+1}\widetilde{y}_{n+1},t)-\mu\frac{dZ_n}{dt},$$

$$H_2(t,\mu)=Z_n-\frac{d}{dt}(Y_n+\mu^{n+1}\widetilde{y}_{n+1}).$$

于是也像在定理 3.1 的证明中那样, 不难相信有 $H_1(t,\mu)=O(\mu^{n+1})$, $H_2(t,\mu)\equiv 0$, 因此余项 $u(t,\mu)$, $v(t,\mu)$ 的方程可以写成

$$
\begin{cases}
\mu\dfrac{du}{dt}=A(t,\mu)u+[A_y(t,\mu)Z_n(t,\mu)+B_y(t,\mu)]v+G(u,v,t,\mu), \\
\dfrac{dv}{dt}=u,
\end{cases}
\tag{4.416}
$$

这里 $A(t,\mu)=A(Y_n+\mu^{n+1}\widetilde{y}_{n+1},t)$, 记号 $A_y(t,\mu)$, $B_y(t,\mu)$ 有同样的意义, 而函数

$$G(u,v,t,\mu)=A(Y_n+\mu^{n+1}\widetilde{y}_{n+1}+v,t)(Z_n+u)+B(Y_n+\mu^{n+1}\widetilde{y}_{n+1}+v,t)$$

$$-A(t,\mu)u-[A_y(t,\mu)Z_n(t,\mu)+B_y(t,\mu)]v-\mu\frac{dZ_n(t,\mu)}{dt}$$

具有如下容易验证的性质:

1. $G(0,0,t,\mu)=H_1(t,\mu)=O(\mu^{n+1})$.

2. 对 $\forall\,\varepsilon>0, \exists$ 常数 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 和 $\mu_0=\mu_0(\varepsilon)$, 使得只要 $|u_1|\leqslant\delta$, $|u_2|\leqslant\delta$, $|v_1|\leqslant\delta$, $|v_2|\leqslant\delta$, $0<\mu\leqslant\mu_0$, 就有

$$|G(u_1,v_1,t,\mu)-G(u_2,v_2,t,\mu)|\leqslant\varepsilon[|u_1-u_2|+(1+\frac{1}{\mu}\exp(-\frac{\kappa t}{\mu}))|v_1-v_2|]. \quad (4.417)$$

$u(t,\mu)$, $v(t,\mu)$ 的初始条件从 (4.382) 即可得到, 且满足

$$u(0,\mu)=O(\mu^{n+1}),\quad v(0,\mu)=O(\mu^{n+2}). \quad (4.418)$$

从 (4.416) 的第二个方程有

$$v(t,\mu)=O(\mu^{n+2})+\int_0^t u(s,\mu)ds. \quad (4.419)$$

将此代入 (4.416) 的第一个方程即得

$$\mu\frac{du}{dt}=A(t,\mu)u+[A_y(t,\mu)Z_n(t,\mu)+B_y(t,\mu)]\int_0^t u(s,\mu)ds+Q(u,t,\mu), \quad (4.420)$$

容易验证其中的积分算子 $Q(u,t,\mu)=G(u,\int_0^t u(s,\mu)ds+O(\mu^{n+2}),t,\mu)+O(\mu^{n+1})$ 具有下列两条性质:

1.

$$Q(0,t,\mu)=O(\mu^{n+1}).^{①} \quad (4.421)$$

2. 对 $|u_1(s,\mu)|\leqslant\delta(\varepsilon)$, $|u_2(s,\mu)|\leqslant\delta(\varepsilon)$, $0<\mu\leqslant\mu_0(\varepsilon)$ 有

$$|Q(u_1,t,\mu)-Q(u_2,t,\mu)|\leqslant\varepsilon\max_{0\leqslant s\leqslant t}|u_1(s,\mu)-u_2(s,\mu)|. \quad (4.422)$$

---

①如果在 (4.415) 对 $v(t,\mu)$ 的表达式中丢掉项 $\mu^{n+1}\widetilde{y}_{n+1}$, 亦即像通常那样, 假设 $v(t,\mu)=y(t,\mu)-Y_n(t,\mu)$, 那么, 就有等式 $H_2(t,\mu)=O\left(\mu^n\exp\left(-\frac{\kappa t}{\mu}\right)\right)$, $v(0,\mu)=O(\mu^{n+1})$ 成立, 于是不同于 (4.421), 我们得到 $Q(0,t,\mu)=O(\mu^{n+1})+O\left(\mu^n\exp\left(-\frac{\kappa t}{\mu}\right)\right)$. 这对于 $u(t,\mu)$ 就能够得到这样的估计 $u(t,\mu)=\left(\mu^n\exp\left(-\frac{\kappa t}{\mu}\right)\right)$ 来代替所需要的估计 $u(t,\mu)=O(\mu^{n+1})$. 在 (4.415) 式中, 项 $\mu^{n+1}\widetilde{y}_{n+1}$ 的存在推导出估计式 (4.421), 像在下面将要看到那样, 这已经给出对 $u(t,\mu)$ 得到所要求估计的可能性.

不等式 (4.422) 可以由 (4.417) 推出, 这只要考虑到 $\frac{t}{\mu}\exp(-\frac{\kappa t}{\mu}) \leqslant c$, 从而有

$$\begin{aligned}(1+\frac{1}{\mu}\exp(-\frac{\kappa t}{\mu}))|v_1-v_2| &\leqslant (1+\frac{1}{\mu}\exp(-\frac{\kappa t}{\mu}))\int_0^t |u_1(s,\mu)-u_2(s,\mu)|ds\\ &\leqslant (1+\frac{1}{\mu}\exp(-\frac{\kappa t}{\mu}))t\max_{0\leqslant s\leqslant t}|u_1(s,\mu)-u_2(s,\mu)|\\ &\leqslant c\max_{0\leqslant s\leqslant t}|u_1(s,\mu)-u_2(s,\mu)|\end{aligned}$$

代替方程 (4.420) 和初始条件 (4.418) 以等价的积分方程

$$\begin{aligned}u(t,\mu) = \exp\left(\frac{1}{\mu}\int_0^t A(s,\mu)ds\right)O(\mu^{n+1}) + \int_0^t \frac{1}{\mu}\exp\left(\frac{1}{\mu}\int_s^t A(p,\mu)dp\right)\\ +\{[A_y(s,\mu)Z_n(s,\mu)+B_y(s,\mu)]\int_0^s u(p,\mu)dp + Q(u,s,\mu)\}ds,\end{aligned}$$

并将其重写成

$$u(t,\mu) = \int_0^t K(t,s,\mu)u(s,\mu)ds + S(u,t,\mu) \tag{4.423}$$

这里 $K(t,s,\mu) = \int_s^t \frac{1}{\mu}\exp(\frac{1}{\mu}\int_p^t A(p,\mu)dp)[A_y(p,\mu)Z_n(p,\mu)+B_y(p,\mu)]dp$, 且显然满足估计

$$|K(t,s,\mu)| \leqslant c(1+\frac{1}{\mu}\exp(-\frac{\kappa t}{\mu})),\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\ 0<\mu\leqslant\mu_0,$$

而积分算子 $S(u,t,\mu)$ (不难将其写成明显的表达式) 具有像 $Q(u,t,\mu)$ 同样的两条性质.

类似于推导不等式 (4.410), 可以证明, 核 $K(t,s,\mu)$ 的预解式 $R(t,s,\mu)$ 有像核本身同样的估计. 根据公式 (3.57) 可得与方程 (4.423) 等价的方程

$$u(t,\mu) = S(u,t,\mu) + \int_0^t R(t,s,\mu)S(u,s,\mu)ds \equiv J(t,s,\mu), \tag{4.424}$$

这里积分算子 $J(t,s,\mu)$ 具有像 $S(u,t,\mu)$ 同样的两条性质.

像对第三章的方程组 (3.103), (3.104) 那样, 对 (4.424) 应用逐次逼进法, 于是可得方程 (4.424) 存在的唯一解 $u(t,\mu)$, 而且满足不等式

$$|u(t,\mu)| \leqslant c\mu^{n+1},\ \text{对}\ 0\leqslant t\leqslant T,\ 0<\mu\leqslant\mu_0.$$

由此及 (4.419) 即见 $v(t,\mu)$ 满足同样不等式. 由于 $\widetilde{y}_{n+1}(t/\mu)$ 为有界函数, 所以从 (4.415) 直接得到 (4.405), 从而定理 4.6 得证.

3. 对边值问题的应用

a) 对于方程组 (4.381) 我们给定边界条件 (T=1)

$$y(0,\mu) = a, \quad y(1,\mu) = b. \tag{4.425}$$

(在本节开头考虑的例子 (4.377), (4.378) 就属于问题 (4.381), (4.425) 这一类). 仿照 §13 的办法, 我们将把构造问题 (4.381), (4.425) 的解作为带有未知参数 z_k, y_k 的问题 (4.381), (4.382) 来求解. 将 (4.383) 代入 (4.425) 即得决定这些参数的方程. 其零次近似即为确定 z_{-1}, y_0 的方程

$$y_0 = a, \quad \overline{y}_0(1) = b.$$

从第一个方程立即确定 $y_0 : y_0 = a$, 而后从第二个方程在一定条件下即可求出 z_{-1}. $\overline{y}_0(1)$ 是通过 $\overline{y}_0(t)$ 的初值 $\widetilde{y}_0$ 而依赖于 z_{-1} 的 (参看 (4.396)), 这是由于作为 z_{-1} 的函数的 $\widetilde{y}_0$ 是由方程 (4.395) 确定的. 为了确定 z_{-1} 可以有各种方法. 我们不用在点 $t=0$ 的初始条件, 而用在点 $t=1$ 处的初始条件 $\overline{y}_0(1) = b$ 来确定退化方程组 (4.385) 的解 $\overline{y}_0(t)$, 找到了 $\overline{y}_0(t)$ 之后, 也就知道了 $\overline{y}_0(0) = \widetilde{y}_0$, 于是在 (4.395) 中令 $\widetilde{y} = \widetilde{y}_0$ 即得 z_{-1}.

用类似的方法可继续确定 (4.382) 的系数, 从而得到初值问题 (4.381), (4.382) 解的渐近展开式 (4.383), 它同时也是边值问题 (4.381), (4.425) 的解. 由于这种类型的构造在上面的 §13, §15 都进行过, 在此不再详述.

我们注意到, 代替 (4.425) 当然可以考虑更一般形式的条件 (4.5).

b) 在 a) 中所描述的构造得到边界层在 $t=0$ 邻域的解. 但是问题 (4.381), (4.425) 也可能存在内部边界层的解, 这种解应当作为其初始条件在点 $t_0 \in (0,1)$ 的初值问题的解来构造:

$$z(t_0, \mu) = \frac{z_{-1}}{\mu} + z_0 + \mu z_1 + \cdots, \quad y(t_0, \mu) = y_0 + \mu y_1 + \cdots, \tag{4.426}$$

其中 t_0 也是未知的. 代替 (4.383) 有 (参看 (4.274), (4.275))

$$z(t,\mu) = \begin{cases} \overset{(1)}{\overline{z}}_0(t) + \mu \overset{(1)}{\overline{z}}_1(t) + \cdots + \frac{1}{\mu} \overset{(1)}{Q}_{-1} z(\tau) + \overset{(1)}{Q}_0 z(\tau) + \cdots, & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ \overset{(2)}{\overline{z}}_0(t) + \mu \overset{(2)}{\overline{z}}_1(t) + \cdots + \frac{1}{\mu} \overset{(2)}{\Pi}_{-1} z(\tau) + \overset{(2)}{\Pi}_0 z(\tau) + \cdots, & t_0 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{4.427}$$

$$y(t,\mu) = \begin{cases} \overset{(1)}{\overline{y}}_0(t) + \mu \overset{(1)}{\overline{y}}_1(t) + \cdots + \overset{(1)}{Q}_0 y(\tau) + \mu \overset{(1)}{Q}_1 y(\tau) + \cdots, & 0 \leqslant t \leqslant t_0, \\ \overset{(2)}{\overline{y}}_0(t) + \mu \overset{(2)}{\overline{y}}_1(t) + \cdots + \overset{(2)}{\Pi}_0 y(\tau) + \mu \overset{(2)}{\Pi}_1 y(\tau) + \cdots, & t_0 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

由 (4.425) 的零次近似得

$$\overset{(1)}{\overline{y}}_0(0) = a, \quad \overset{(2)}{\overline{y}}_0(1) = b.$$

利用这些条件确定方程组 (4.385) 的解 $\overset{(1)}{\overline{z}}_0(t)$, $\overset{(1)}{\overline{y}}_0(t)$ 和 $\overset{(2)}{\overline{z}}_0(t)$, $\overset{(2)}{\overline{y}}_0(t)$. 根据 (4.395) 和 (4.396), 其中每一个都应满足条件 (在 (4.395) 中的 $A(y,0)$ 现在应当写成 $A(y,t_0)$)

$$z_{-1} + \int_{y_0}^{\overset{(i)}{\overline{y}}_0(t_0)} A(y,t_0)dy = 0, \ i = 1, 2. \tag{4.428}$$

将 $i=2$ 的方程减去 $i=1$ 的方程即得

$$\int_{\overset{(1)}{\overline{y}}_0(t_0)}^{\overset{(2)}{\overline{y}}_0(t_0)} A(y,t_0)dy=0. \tag{4.429}$$

由此即可确定 t_0, 但必须要求此 t_0 值属于区间 $(0,1)$, 而且应当满足不等式 (见条件 III)

$$\begin{aligned} &A(\overset{(1)}{\overline{y}}_0(t),t)>0, \quad \text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_0, \\ &A(\overset{(2)}{\overline{y}}_0(t),t)<0, \quad \text{当 } t_0\leqslant t\leqslant 1. \end{aligned} \tag{4.430}$$

从方程 (4.428) 仍然不能确定未知量 z_{-1} 和 y_0, 因为 (4.429) 是由 (4.428) 的两个方程得到的, 因此从 (4.428) 只可能找出 z_{-1} 和 y_0 之间的一个关系; 在下一个近似中才能把它们完全求出. 其细节在此不再详述, 但要说明一点, 就是 y_0 应当属于以有界点 $\overset{(1)}{\overline{y}}_0(t_0)$ 和 $\overset{(2)}{\overline{y}}_0(t_0)$ 为端点的区间中, 由 (4.428) 和 (4.430) 即见这两点分别是附加方程 (4.394) 的左稳定和右稳定奇点, 当然这时 (4.394) 中的 $A(y,0)$ 也应当用 $A(y,t_0)$ 代替; 此外还要求在此区间中不再有其他奇点.

构造可以继续下去, 并确定 (4.427) 所有的项. 从而可以构造出初值问题 (4.381), (4.426) 解的展开, 这也就是边值问题 (4.381), (4.425) 的解. 在 a) 所讨论的情况下, 解的 y 分量当 $\mu\to 0$ 取极限时在 $t=0$ 处产生间断

$$\lim_{\mu\to 0} y(t,\mu)=\begin{cases} y_0, & \text{当 } t=0, \\ \overline{y}_0(t), & \text{当 } 0<t\leqslant 1. \end{cases}$$

而在本段所讨论的情况, y 分量当 $\mu\to 0$ 取极限时在 $t=t_0$ 处产生间断

$$\lim_{\mu\to 0} y(t,\mu)=\begin{cases} \overset{(1)}{\overline{y}}_0(t), & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant t_0, \\ y_0, & \text{当 } t=t_0, \\ \overset{(2)}{\overline{y}}_0(t), & \text{当 } t_0<t\leqslant 1. \end{cases}$$

对于 (4.381) 型拟线性方程组的内部边界层现象, M. A. 加拉霍夫 (M. A. Галахов) 在他的文章 [29]中就注意到并加以描述. 对具有内部层的解的兴趣在于它在一定程度上是流体动力学问题的模型.

最后我们考虑如下例子 (参看 [29])

$$\mu y''=-yy'-y, \quad y(0,\mu)=-1, \quad y(1,\mu)=1.$$

按照上述的规则可得 $\overset{(1)}{\overline{y}}_0(t)=-t-1$, $\overset{(2)}{\overline{y}}_0(t)=-t+2$, 而由方程 (4.429) 可得 $t_0=\dfrac{1}{2}$, 这时条件 (4.430) 完全满足.

4. 某些有关问题 a) 在研究更高阶方程的边值问题时, 也产生构造有奇异初

始条件的渐近解问题. A. Б. 济明 (A. Б. Зчмин) 在他的文章 [33] 中考虑了 $y^{(n)}$ 乘上小参数 μ 的 n 阶线性方程问题, 其初始条件为

$$y^{(k)}(0,\mu)=\mu^{-k}b_{-k}^{(k)}+\mu^{-k+1}b_{-k+1}^{(k)}+\cdots+b_0^{(k)}+\mu b_1^{(k)}+\cdots,\ k=0,1,\cdots,n-1,$$

其中 $b_j^{(k)}$ 为给定常数. 这个问题的渐近解也可以按上述的格式构造, 但是这时 $y^{(k)}(t,\mu)$ 的表达式含有从 μ^{-k} 开始的边界项.

值得注意的是 y 和它的导数, 一般来说, 仅在系数 $b_j^{(k)}$ 之间有确定联系的情况下才收敛于相应的退化值, 这与二阶方程 (4.381) 比较是新的方面.

b) 如果方程组是非线性的, 那么解的性质当 $\mu\to 0$ 时, 其一般特点还是保持着. 考虑初值问题

$$\mu\frac{dz}{dt}=F(z,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=z, \tag{4.431}$$

$$y(0,\mu)=y_0,\quad z(0,\mu)=z_0(\mu)\to\infty,\ 当\ \mu\to 0.$$

假设当 $z\to\infty$ 时 $F(z,y,t)$ 是像 $|z|^l$ 那样增大, 这里 $0<l\leqslant 2$. 于是像 M. И. 维希克 (M. И. Вишик) 和 Л. A. 柳斯捷尼克 (Л. A. Люстерник) 所证明的那样 [26], 方程组 (4.431) 的解 $y(t,\mu)$ 在适当选取的 $z_0(\mu)$ 之下, 当 $\mu\to 0$ 时将趋于 (4.431) 的退化方程组的解 $\overline{y}_0(t)$, 而且 $\overline{y}_0(t)$ 在 $t=0$ 时, 并不像第二、三章那种情况, 取值 y_0, 而是取某个值 $y_0+\Delta y_0$, 这里 z_0 为有界. 因此, 产生了在讨论问题 (4.381), (4.382) 时出现的现象, 那时的 Δy_0 是由 (4.397) 给出的. 对于非线性的情况, 既作为 $z_0(\mu)$ 奇异性的特征又是 $z_0(\mu)$ 所产生的结果的量 Δy_0, 是依赖于 l; 当 $l=1+\alpha, -1<\alpha<1$, 应取 $z_0(\mu)=c/\mu^{1/(1-\alpha)}$ (c 为任意常数), 于是 Δy_0 就由方程

$$c^{1-\alpha}=-(1-\alpha)\int_{y_0}^{y_0+\Delta y_0}\psi(y,0)dy \tag{4.432}$$

所决定, 这里 $\psi(y,0)$ 是当 $t=0$ 时函数 $\psi(y,t)$ 的值, 而 $\psi(y,t)$ 是在下述意义下描述当 $z\to\infty$ 时 $F(z,y,t)$ 增长的函数, 即当 $z\to\infty$ 时, $F(z,y,t)$ 的主项为 $\psi(y,t)z^{1+\alpha}$. 这种类型的方程对 $l=2$ ($\alpha=1$) 的情形也成立.

M. И. 维希克和 Л. A. 柳斯捷尼克的研究曾由 K. A. 卡西莫夫 (K. A. Касымов) 所推广 (例如, 见 [35, 36]).

方程组 (4.381) 可以看成 (4.431) 的特例, 为此只须取 $l=1(\alpha=0)$, $\psi(y,t)=A(y,t)$, $c=z_{-1}$ 即可. 这时由 (4.432) 即得

$$z_{-1}=-\int_{y_0}^{y_0+\Delta y_0}A(y,0)dy,$$

这与当 $\widetilde{y}=\widetilde{y}_0$ 时的 (4.395) 一致, 因为 $\widetilde{y}_0=y_0+\Delta y_0$.

总之, $y(t,\mu)$ 初始跳跃的现象在非线性情况也发生, 但是渐近解的特性在非线性情况下是相当复杂的, 至今尚无利用上述的简单算法描述过.

第五章　积分–微分方程的奇异摄动

本章考虑如下形式的积分–微分方程

$$\mu\frac{dz}{dt}=F(z,y,J,t,\mu),\quad \frac{dy}{dt}=f(z,y,J,t,\mu),\quad 0\leqslant t\leqslant T, \tag{5.1}$$

其中 $\mu>0$ 仍为小参数, z 和 y (以及 F 和 f) 分别为 M 和 m 维的向量函数, 而

$$J=\int_0^\alpha K(t,s,z(s,\mu),y(s,\mu),\mu)ds;$$

α 或者等于 T (Fredholm 型方程) 或者等于 t (Volterra 型方程), K 为 l 维的向量函数.

近年来, 在第三章和第四章中对于微分方程研究的许多结果都搬到 (5.1) 形式的积分–微分方程上来 (见 [10]). 特别, M. И. 依马纳利耶夫 (M. И. Иманалиев) 在 [34] 中曾经对方程 (5.1) 的解构造了 (3.24) ~ (3.26) 形式的渐近展开; 这时在第三章§9 中陈述的构造渐近展开的算法经过不太复杂的变化而保持下来, 并将在本章 §17 中详细地讨论.

对于积分–微分方程来说, 除了类似于微分方程解的渐近性质的那些通常性质的问题之外, 还提出了一些有趣的问题, 它是由于方程中积分项的出现而改变了微分方程解的某些 “熟悉” 的性质. 这种类型的问题将在 §18 中讨论.

§17. 初值问题解对小参数的渐近展开

1. 构造渐近展开式的算法　对于方程组 (5.1), 我们给定初始条件

$$z(0,\mu)=z^0,\quad y(0,\mu)=y^0, \tag{5.2}$$

并考虑构造问题 (5.1), (5.2) 关于小参数 μ 渐近展开式的算法, 这时暂且不叙述使得这种构造得以进行的条件. 像在 §9 那样, 我们寻找如下形式的解

$$x(t,\mu)=\overline{x}(t,\mu)+\Pi x(\tau,\mu),\quad \tau=\frac{t}{\mu},\tag{5.3}$$

其中

$$\overline{x}(t,\mu)=\overline{x}_0(t)+\mu\overline{x}_1(t)+\cdots+\mu^k\overline{x}_k(t)+\cdots,\tag{5.4}$$

$$\Pi x(\tau,\mu)=\Pi_0x(\tau)+\mu\Pi_1x(\tau)+\cdots+\mu^k\Pi_kx(\tau)+\cdots\tag{5.5}$$

(x 仍然既表示 z, 也表示 y).

将 (5.3) 代入 J 的表达式, 并将 $J=\int_0^\alpha K(t,s,\overline{z}+\Pi z,\overline{y}+\Pi y,\mu)ds$ 表示成类似于 (5.3) 的形式, 亦即

$$J=\overline{J}(t,\mu)+\Pi J(\tau,\mu);\tag{5.6}$$

为此, 我们首先将 K 写成类似的表达式

$$K=\overline{K}(t,s,\mu)+\Pi K(t,\sigma,\mu),\sigma=\frac{s}{\mu};\tag{5.7}$$

这可按照构造 $F=\overline{F}+\Pi F$ 时 (见 §9) 的规则进行构造, 亦即

$$\begin{aligned}K(t,s,z,y,\mu)=&K(t,s,\overline{z}(s,\mu),\overline{y}(s,\mu),\mu)\\&+\big[K(t,\sigma\mu,\overline{z}(\sigma\mu,\mu)+\Pi z(\sigma,\mu),\overline{y}(\sigma\mu,\mu)+\Pi y(\sigma,\mu),\mu)\\&-K(t,\sigma\mu,\overline{z}(\sigma\mu,\mu),\overline{y}(\sigma\mu,\mu),\mu)\big]\\\equiv&\overline{K}(t,s,\mu)+\Pi K(t,\sigma,\mu).\end{aligned}\tag{5.8}$$

将 $\overline{x}(t,\mu)$ 和 $\Pi x(\tau,\mu)$ 的级数 (5.4) 和 (5.5) 代入 (5.8) 之后, 然后我们就可以将 $\overline{K}(t,s,\mu)$ 和 $\Pi K(t,\sigma,\mu)$ 表示成 μ 的幂级数形式. 对于 $\overline{K}(t,s,\mu)$ 我们有

$$\overline{K}(t,s,\mu)=\overline{K}_0(t,s)+\mu\overline{K}_1(t,s)+\cdots+\mu^k\overline{K}_k(t,s)+\cdots,\tag{5.9}$$

其中

$$\begin{aligned}&\overline{K}_0(t,s)=K(t,s,\overline{z}_0(s),\overline{y}_0(s),0),\\&\overline{K}_k(t,s)=\overline{K}_z(t,s)\overline{z}_k(s)+\overline{K}_y(t,s)\overline{y}_k(s)+R_k(t,s),\quad k=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

矩阵 $\overline{K}_z(t.s)$ 和 $\overline{K}_y(t,s)$ 的元素是在点 $(t,s,\overline{z}_0(s),\overline{y}_0(s),0)$ 处取值, 而向量 $R_k(t,s)$ 是通过 $\overline{z}_i(s),\overline{y}_i(s)$, $i=0,1,\cdots,k-1$, 按确定的方式表示.

对于 $\Pi K(t,\sigma,\mu)$ 可得级数

$$\Pi K(t,\sigma,\mu)=\Pi_0K(t,\sigma)+\mu\Pi_1K(t,\sigma)+\cdots+\mu^k\Pi_kK(t,\sigma)+\cdots,\tag{5.10}$$

其中

$$\begin{aligned}&\Pi_0K(t,\sigma)=K(t,0,\overline{z}_0(0)+\Pi_0z(\sigma),\overline{y}_0(0)+\Pi_0y(\sigma),0)-K(t,0,\overline{z}_0(0),\overline{y}_0(0),0),\\&\Pi_kK(t,\sigma)=K_z(t,\sigma)\Pi_kz(\sigma)+K_y(t,\sigma)\Pi_ky(\sigma)+S_k(t,\sigma),\quad k=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

这里矩阵 $K_z(t,\sigma)$ 和 $K_y(t,\sigma)$ 的元素是在点 $(t,0,\overline{z}_0(0)+\Pi_0 z(\sigma),\overline{y}_0(0)+\Pi_0 y(\sigma),0)$ 处取值, 而向量 $S_k(t,\sigma)$ 是通过 $\Pi_i z(\sigma),\Pi_i y(\sigma)$, $i=0,1,\cdots,k-1$ 按确定的方式表示.

现在利用表达式 (5.7), 即可得到 (5.6). 对于 $\alpha=T$ 的情形有

$$\begin{aligned}J=\int_0^T Kds&=\int_0^T \overline{K}(t,s,\mu)ds+\int_0^T \Pi K(t,\sigma,\mu)ds\\&=\int_0^T \overline{K}(t,s,\mu)ds+\mu\int_0^{T/\mu}\Pi K(t,\sigma,\mu)d\sigma\\&=\int_0^T \overline{K}(t,s,\mu)ds+\mu\int_0^{\infty}\Pi K(t,\sigma,\mu)d\sigma-\mu\int_{T/\mu}^{\infty}\Pi K(t,\sigma,\mu)d\sigma.\end{aligned}$$

在下面的第 2 段中将证明, 在满足相应的稳定性条件 (5.26) 之下, 当 $\sigma\to\infty$ 时, $\Pi_k(t,\sigma)$, $k=0,1,\cdots$, 以指数式衰减; 因此上式中的广义积分收敛, 而最后一项可以忽略, 因为当 $\mu\to 0$ 时, 它的量阶为 $O(e^{-\kappa T/\mu})$, 这是与 μ 的任一幂次相比都可以略去的小量. 因此在 $\alpha=T$ 的情况下, 最后我们得到 J 的表达式 (5.6) 只由 $\overline{J}(t,\mu)$ 组成, 而不包含 $\Pi J(\tau,\mu)$, 即

$$J=\int_0^T Kds=\int_0^T \overline{K}(t,s,\mu)ds+\mu\int_0^{\infty}\Pi K(t,\sigma,\mu)d\sigma\equiv\overline{J}(t,\mu).\tag{5.11}$$

对于 $\alpha=t$ 的情形有

$$\begin{aligned}J&=\int_0^t Kds=\int_0^t \overline{K}(t,s,\mu)ds+\mu\int_0^{\tau}\Pi K(t,\sigma,\mu)ds\\&=\int_0^t \overline{K}(t,s,\mu)ds+\mu\int_0^{+\infty}\Pi K(t,\sigma,\mu)d\sigma-\mu\int_{\tau}^{\infty}\Pi K(\tau\mu,\sigma,\mu)d\sigma\\&\equiv\overline{J}(t,\mu)+\Pi J(\tau,\mu),\end{aligned}$$

其中

$$\begin{cases}\overline{J}(t,\mu)\overset{\text{def}}{=}\displaystyle\int_0^t \overline{K}(t,s,\mu)ds+\mu\int_0^{\infty}\Pi K(t,\sigma,\mu)d\sigma,\\ \Pi J(\tau,\mu)\overset{\text{def}}{=}-\mu\displaystyle\int_{\tau}^{\infty}\Pi K(\tau\mu,\sigma,\mu)d\sigma.\end{cases}\tag{5.12}$$

将 $\overline{K}(t,s,\mu)$ 的级数 (5.9) 和 $\Pi K(t,\sigma,\mu)$ 的级数 (5.10) 代入 (5.11) 和 (5.12) 中的积分, 并将 (5.12) 第二个等式中的项 $\Pi_k K(\tau\mu,\sigma,\mu)$ 展开成 μ 的幂级数, 从而即得 $\overline{J}(t,\mu)$ 和 $\Pi J(\tau,\mu)$ 关于 μ 的幂级数的表达式

$$\overline{J}(t,\mu)=\overline{J}_0(t)+\mu\overline{J}_1(t)+\cdots+\mu^k\overline{J}_k(t)+\cdots,\tag{5.13}$$

$$\Pi J(\tau,\mu)=\Pi_0 J(\tau)+\mu\Pi_1 J(\tau)+\cdots+\mu^k\Pi_k J(\tau)+\cdots,\tag{5.14}$$

其中

$$\overline{J}_0(t)=\int_0^\alpha \overline{K}_0(t,s)ds\quad(\alpha\text{ 等于 }T\text{ 或者 }t),\tag{5.15}$$

$$\overline{J}_k(t)=\int_0^\alpha \overline{K}_k(t,s)ds+\int_0^\infty \Pi_{k-1}K(t,\sigma)d\sigma,\quad k=1,2,\cdots,$$

$$\Pi_0J(\tau)\equiv 0,\quad \Pi_1J(\tau)=-\int_\tau^\infty \Pi_0K(0,\sigma)d\sigma,\quad \cdots,$$

渐近展开的进一步构造像在 §9 中那样进行, 将 $x=\overline{x}+\Pi x$, $J=\overline{J}+\Pi J$ 代入 (5.1) 之后, 并将方程组 (5.1) 右端写成类似于 (5.3) 的形式, 对于 F 来说, 这个变换可写成 (对于 f 完全一样给出)：

$$\begin{aligned}F\big(\overline{z}+\Pi z,\overline{y}+\Pi y,\overline{J}+\Pi J,t,\mu\big)&=F\big(\overline{z}(t,\mu),\overline{y}(t,\mu),\overline{J}(t,\mu),t,\mu\big)\\&+\big[F\big(\overline{z}(\tau\mu,\mu)+\Pi z(\tau,\mu),\overline{y}(\tau\mu,\mu)+\Pi y(\tau,\mu),\overline{J}(\tau\mu,\mu)+\Pi J(\tau,\mu),\tau\mu,\mu\big)\\&-F\big(\overline{z}(\tau\mu,\mu),\overline{y}(\tau\mu,\mu),\overline{J}(\tau\mu,\mu),\tau\mu,\mu\big)\big]\equiv\overline{F}+\Pi F.\end{aligned}$$

因此我们有

$$\mu\frac{d\overline{z}}{dt}+\frac{d\Pi z}{d\tau}=\overline{F}+\Pi F,\quad \mu\frac{d\overline{y}}{dt}+\frac{d\Pi y}{d\tau}=\mu\overline{f}+\mu\Pi f,\tag{5.16}$$

(第二组方程预先乘以 μ).

在 (5.16) 中代替 $\overline{x}$, Πx, $\overline{J}$, ΠJ, 用对应的级数 (5.4), (5,5), (5.13), (5.18) 代入, 并将 $\overline{F}$, ΠF, $\overline{f}$, 和 Πf 表示成类似的 μ 的幂级数; 我们写出 $\overline{F}$ 和 ΠF 的这种类型级数, 至于 $\overline{f}$ 和 Πf 完全类似. 对于 $\overline{F}$ 可得级数

$$\overline{F}=\overline{F}_0+\mu\overline{F}_1+\cdots+\mu^k\overline{F}_k+\cdots,$$

其中

$$\begin{aligned}\overline{F}_0&=F(\overline{z}_0(t),\overline{y}_0(t),\overline{J}_0(t),t,0),\\\overline{F}_k&=\overline{F}_z(t)\overline{z}_k(t)+\overline{F}_y(t)\overline{y}_k(t)+\overline{F}_J(t)\overline{J}_k(t)+F_k(t),\quad k=1,2,\cdots;\end{aligned}$$

矩阵 $\overline{F}_z(t),\overline{F}_y(t),\overline{F}_J(t)$ 的元素均在点 $(\overline{z}_0(t),\overline{y}_0(t),\overline{J}_0(t),t,0)$ 处计算, 而向量 $F_k(t)$ 是通过 $\overline{z}_i(t),\overline{y}_i(t),\overline{J}_i(t)$, $i=0,1,\cdots,k-1$, 按确定的方式表示.

对于 ΠF 可得级数

$$\Pi F=\Pi_0F+\mu\Pi_1F+\cdots+\mu^k\Pi_kF+\cdots,\tag{5.17}$$

其中

$$\begin{aligned}\Pi_0F&=F(\overline{z}_0(0)+\Pi_0z(\tau),\overline{y}_0(0)+\Pi_0y(\tau),\overline{J}_0(0),0,0)\\&\quad-F(\overline{z}_0(0),\overline{y}_0(0),\overline{J}_0(0),0,0),\\\Pi_kF&=F_z(\tau)\Pi_kz(\tau)+F_y(\tau)\Pi_ky(\tau)+G_k(\tau),\quad k=1,2,\cdots.\end{aligned}$$

矩阵 $F_z(\tau), F_y(\tau)$ 的元素均在点 $(\overline{z}_0(0)+\Pi_0 z(\tau), \overline{y}_0(0)+\Pi_0 y(\tau), \overline{J}_0(0), 0, 0)$ 处计算, 而向量 $G_k(\tau)$ 是通过 $\Pi_i z(\tau), \Pi_i y(\tau)$, $i=0,1,\cdots,k-1$, 按确定的方式表示.

现在比较等式 (5.16) 两端关于 μ 同次幂的系数, 并且像在第三章那样, 将关于变量 t 和变量 τ 的方程分开, 即得确定 $\overline{x}_k(t), \Pi_k x(\tau)$, $k=0,1,2,\cdots$, 的方程.

对于 $\overline{x}_0(t)$ 有

$$\begin{cases} 0=\overline{F}_0 \overset{\text{def}}{=} F\left(\overline{z}_0(t), \overline{y}_0(t), \displaystyle\int_0^{\alpha} K(t,s,\overline{z}_0(s),\overline{y}_0(s),0)ds, t, 0\right), \\ \dfrac{d\overline{y}_0}{dt}=\overline{f}_0 \overset{\text{def}}{=} f\left(\overline{z}_0(t), \overline{y}_0(t), \displaystyle\int_0^{\alpha} K(t,s,\overline{z}_0(s),\overline{y}_0(s),0)ds, t, 0\right). \end{cases} \tag{5.18}$$

这个方程组显然是原来方程组 (5.1) 的退化方程组, 亦即可从 (5.1) 中令 $\mu=0$ 得到. 与原来的方程组相比, (5.18) 的阶数是降低了, 因为第一组方程已成了积分方程. 对于 $\Pi_0 x(\tau)$ 可得方程组

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_0 z}{d\tau}=\Pi_0 F \overset{\text{def}}{=} F(\overline{z}_0(0)+\Pi_0 z(\tau), \overline{y}_0(0)+\Pi_0 y(\tau), \overline{J}_0(0), 0, 0) \\ \qquad\qquad -F(\overline{z}_0(0), \overline{y}_0(0), \overline{J}_0(0), 0, 0), \\ \dfrac{d\Pi_0 y}{d\tau}=0. \end{cases} \tag{5.19}$$

从 $\overline{J}_0(t)$ 的表达式 (5.15) 得出, 若 $\alpha=t$, 则有 $\overline{J}_0(0)=0$; 若 $\alpha=T$, 则有 $\overline{J}_0(0)=\int_0^T \overline{K}_0(0,s)ds = \int_0^T K(0,s,\overline{z}_0(s),\overline{y}_0(s),0)ds$. 无论这两种情况的哪一种, 关于 $\Pi_0 x$ (τ) 的方程组 (5.19) 都是纯粹微分方程组.

为了确定 $\overline{x}_k(t), \Pi_k x(\tau)$, $k=1,2,\cdots$, 我们得到的是线性方程组, 其中对于 $\overline{x}_k(t)$ 为积分-微分方程, 而对于 $\Pi_k x(\tau)$ 是纯粹的微分方程:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{z}_{k-1}}{dt}=\overline{F}_k \overset{\text{def}}{=} \overline{F}_z(t)\overline{z}_k(t)+\overline{F}_y(t)\overline{y}_k(t)+\overline{F}_J(t)\left\{\displaystyle\int_0^{\alpha}[\overline{K}_z(t,s)\overline{z}_k(s)\right. \\ \qquad \left. +\overline{K}_y(t,s)\overline{y}_k(s)+R_k(t,s)]ds+\displaystyle\int_0^{\infty}\Pi_{k-1}K(t,\sigma)d\sigma\right\}+F_k(t), \\ \dfrac{d\overline{y}_k}{dt}=\overline{f}_k \overset{\text{def}}{=} \overline{f}_z(t)\overline{z}_k(t)+\overline{f}_y(t)\overline{y}_k(t)+\overline{f}_J(t)\left\{\displaystyle\int_0^{\alpha}[\overline{K}_z(t,s)\overline{z}_k(s)\right. \\ \qquad \left. +\overline{K}_y(t,s)\overline{y}_k(s)+r_k(t,s)]ds+\displaystyle\int_0^{\infty}\Pi_{k-1}K(t,\sigma)d\sigma\right\}+f_k(t), \end{cases} \tag{5.20}$$

其中 $r_k(t,s)$ 和在 $\overline{f}_k$ 表达式中的 $f_k(t)$ 具有在上面叙述过的 $R_k(t,s)$ 和在 $\overline{F}_k$ 表达式中的 $F_k(t)$ 一样的意义.

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_k z}{d\tau}=\Pi_k F \overset{\text{def}}{=} F_z(\tau)\Pi_k z+F_y(\tau)\Pi_k y+G_k(\tau), \\ \dfrac{d\Pi_k y}{d\tau}=\Pi_{k-1}f, \end{cases} \tag{5.21}$$

这里 $\Pi_{k-1}f$ 是类似于 (5.17) 在 Πf 展开式中 μ^{k-1} 的系数.

为了从方程 (5.18) ~ (5.21) 确定 $\overline{x}_k(t), \Pi_k x(\tau)$, 还需要给出初始条件. 像在第三章 §9 中那样进行推算之后, 我们可得

$$\overline{y}_0(0) = y^0, \tag{5.22}$$

$$\overline{y}_k(0) = \int_0^\infty \Pi_{k-1} f d\sigma, \tag{5.23}$$

$$\Pi_0 z(0) = z^0 - \overline{z}_0(0), \quad \Pi_0 y(0) = 0, \tag{5.24}$$

$$\Pi_k z(0) = -\overline{z}_k(0), \quad \Pi_k y(0) = -\int_0^\infty \Pi_{k-1} f d\sigma, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{5.25}$$

(我们注意到由于在 (5.18), (5.20) 中的第一组方程都是积分方程, 因此对于 $\overline{z}_k(t)$, $k = 0, 1, \cdots$, 不需要给出初始条件) . 逐次求解问题 (5.18), (5.22); (5.19), (5.24); (5.20), (5.23); (5.21), (5.25) 之后, 即可确定展开式 (5.4), (5.5) 的系数.

2. 关于 Volterra 型方程的余项估计 我们将考虑 Volterra 型 ($\alpha = t$) 积分项 J 的方程组 (5.1), 我们叙述使得在上段中所进行的形式构造成为可能的条件. 像在第三章那样, 所给条件将对两个方程组起基本作用: 退化方程组 (5.18) 和边界层零次近似函数的方程组 (5.19). 由于在 (5.18) 中的第一组方程是非线性积分方程, 因此问题 (5.18), (5.22) 或者有一个或几个解, 或者为超定方程.

I. 假设 $\overline{z}_0(t), \overline{y}_0(t)$ 为 (5.18), (5.22) 定义在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上的一个解.

考虑其元素为 $\dfrac{\partial F^i}{\partial z^j}$, $i, j = 1, \cdots, M$, 且在点

$$\left(\overline{z}_0(t),\, \overline{y}_0(t),\, \int_0^t K(t, s, \overline{z}_0(s), \overline{y}_0(s), 0) ds,\, t,\, 0\right)$$

处取值的矩阵 $\overline{F}_z(t)$. 以 $\overline{\lambda}_i(t)$, $i = 1, \cdots, M$, 记为 $\overline{F}_z(t)$ 的特征值. 像在第三章那样 (见 (3.22)), 作为基本要求之一, 我们引进如下的稳定性条件:

II. 假设:

$$\operatorname{Re} \overline{\lambda}_i(t) < 0, \quad \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant T, \quad i = 1, 2, \cdots, M. \tag{5.26}$$

我们现在转到方程组 (5.19), 由 (5.19) 的第二组方程, 并考虑到初始条件 (5.24), 即得

$$\Pi_0(\tau) \equiv 0, \quad \text{对 } \tau \geqslant 0;$$

又因为在 Volterra 型方程的情况下有 $\overline{J}_0(0) = 0$, 所以对于 $\Pi_0 z(\tau)$ 可得微分方程

$$\begin{aligned}\frac{d\Pi_0 z}{d\tau} &= F(\overline{z}_0(0) + \Pi_0 z, \overline{y}_0(0), 0, 0, 0) - F(\overline{z}_0(0), \overline{y}_0(0), 0, 0, 0) \\ &= F(\overline{z}_0(0) + \Pi_0 z, y^0, 0, 0, 0),\end{aligned} \tag{5.27}$$

以及初始条件 (见 (5.24))

$$\Pi_0 z(0) = z^0 - \overline{z}_0(0). \tag{5.28}$$

方程组 (5.27) 在这里起了在第三章中辅助方程组 (3.43) 同样的作用. 因为由 (5.26) 有 $\mathrm{Re}\,\overline{\lambda}_i(t) < 0,\ i = 1, 2, \cdots, M$, 因此向量 $\Pi_0 z = 0$ 是方程组 (5.27) 的渐近稳定奇点. 也像在第三章那样, 在此假设满足如下条件:

III. 假设 $\Pi_0 z(\tau)$ 的初值 $z^0 - \overline{z}_0(0)$ 属于奇点 $\Pi_0 z = 0$ 的影响域, 亦即问题 (5.27), (5.28) 的解 $\Pi_0 z(\tau)$ 当 $\tau \to \infty$ 时趋于零.

为了后面的讨论, 我们引进如下的点集 (我们理解 $\{x : Q\}$ 是表示具有性质 Q 的所有点 x 的集合) :

$$S_{01} = \{(t, s, z, y, \mu) : 0 \leqslant t \leqslant T;\ s = 0;\ z = \overline{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau), \tau \geqslant 0;\ y = y^0;\ \mu = 0\},$$

$$S_{02} = \{(t, s, z, y, \mu) :\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T;\ z = \overline{z}_0(s);\ y = \overline{y}_0(s);\ \mu = 0\},$$

$$L_{01} = \{(z, y, J, t, \mu) :\ z = \overline{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau),\ \tau \geqslant 0;\ y = y^0;\ J = 0;\ t = 0;\ \mu = 0\},$$

$$L_{02} = \{(z, y, J, t, \mu) :\ z = \overline{z}_0(t);\ y = \overline{y}_0(t);\ J = \overline{J}_0(t);\ 0 \leqslant t \leqslant T;\ \mu = 0\},$$

其中 $\overline{J}_0(t) \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\int_0^t K(t, s, \overline{z}_0(s), \overline{y}_0(s), 0) ds$. 我们以 S_0 记 S_{01} 和 S_{02} 的并集, 以 L_0 记L_{01} 和 L_{02} 的并集. 我们还要求满足函数 K, F 和 f 光滑性程度的如下条件:

IV. 假设函数 $K(t, s, z, y, \mu)$ 对其所有变量在集合 S_0 的某个 δ-管中 $(n+1)$ 次连续偏导数. 函数 $F(z, y, J, t, \mu)$ 和函数 $f(z, y, J, t, \mu)$ 对其所有变量在集合 L_0 的某个 δ-管中 $(n+2)$ 次连续偏导数. (δ-管的定义参看 §10 第 1 段) .

一般来说, 条件 IV 意味着函数 K, F 和 f 在零次近似 $\overline{x}_0(t) + \Pi_0 x(\tau)$ 的某个邻域中应当充分光滑.

在条件 I $\sim$ IV 之下, 我们确定级数 (5.4), (5.5) 的系数直到包括下标号码为 n 的项, 并以 $X_n(t, \mu)$ 记展开式 (5.3) 中 n 阶部分和, 即

$$X_n(t, \mu) = \sum_{k=0}^{n} \mu^k \big(\overline{x}_k(t) + \Pi_k x(\tau)\big).$$

定理 5.1 在满足条件 I $\sim$ V 之下, 存在常数 $\mu_0 > 0$ 和 $c > 0$, 使得当 $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时, 问题 (5.1), (5.2) 在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上存在唯一解 $z(t, \mu)$, $y(t, \mu)$ 且满足不等式

$$\|x(t, \mu) - X_n(t, \mu)\| \leqslant c\mu^{n+1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.29}$$

证明 定理 5.1 的证明可以按照证明定理 3.1 时的同样格式进行. 我们提出证明的基本步骤, 并同时指出在定理 5.1 的证明中与定理 3.1 相比较的那些区别, 这些区别基本上是一些与方程中出现积分项有关的技术上复杂性问题.

因为确定边界层函数 $\Pi_k x(\tau)$ 的方程 (5.19), (5.21) 是纯粹的微分方程, 所以完全与在定理 3.1 中一样, 可以证明满足估计

$$\|\Pi_k x(\tau)\| \leqslant c e^{-\kappa\tau}, \quad 当\ \tau \geqslant 0, \quad k = 0, 1, \cdots, n,$$

其中 $c > 0$ 和 $\kappa > 0$ 为某些常数.

其次, 我们令

$$u(t,\mu) = z(t,\mu) - Z_n(t,\mu), \quad v(t,\mu) = y(t,\mu) - Y_n(t,\mu).$$

将 $z = u + Z_n$, $y = v + Y_n$ 代入 (5.1), (5.2), 即得余项 $u(t,\mu)$, $v(t,\mu)$ 的如下方程:

$$\begin{cases} \mu\dfrac{du}{dt} = F_z(t,\mu)u + F_y(t,\mu)v + F_J(t,\mu)\displaystyle\int_0^t K_z(t,s,\mu)u(s,\mu)ds \\ \qquad + F_J(t,\mu)\displaystyle\int_0^t K_y(t,s,\mu)v(s,\mu)ds + G_1(u,v,t,\mu), \\ \dfrac{dv}{dt} = f_z(t,\mu)u + f_y(t,\mu)v + f_J(t,\mu)\displaystyle\int_0^t K_z(t,s,\mu)u(s,\mu)ds \\ \qquad + f_J(t,\mu)\displaystyle\int_0^t K_y(t,s,\mu)v(s,\mu)ds + G_2(u,v,t,\mu), \end{cases} \tag{5.30}$$

以及初始条件

$$u(0,\mu) = 0, \quad v(0,\mu) = 0, \tag{5.31}$$

其中矩阵 $F_z(t,\mu), F_y(t,\mu), F_J(t,\mu), f_z(t,\mu), f_y(t,\mu), f_J(t,\mu)$ 的元素都是在点 $(\overline{z}_0(t)+\Pi_0 z(\tau);\ \overline{y}_0(t),\ \overline{J}_0(t),\ t,\ 0)$ 处取值, 矩阵 $K_z(t,s,\mu)$ 和 $K_y(t,s,\mu)$ 的元素在点 $(t, s, \overline{z}_0(s)+\Pi_0 z(s/\mu),\ \overline{y}_0(s),\ 0)$ 处取值, 而非线性算子 G_1 和 G_2 (不难写出其明显的表达式) 具有如下两条类似于定理 3.1 中 G_1 和 G_2 的性质:

1. 当 $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时有

$$\| G_1(0,0,t,\mu) \| \leqslant c\mu^{n+1},$$
$$\| G_2(0,0,t,\mu) \| \leqslant c(\mu^{n+1} + \mu^n e^{-\kappa t/\mu}),$$

(关于常数 c, κ 和 μ_0, 在第三章 §10 中的第 3 段的注 1, 2 和 4 仍然有效).

2. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 和 $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon)$, 使得如果当 $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时有 $\| u_1(s,\mu) \| \leqslant \delta$, $\| u_2(s,\mu) \| \leqslant \delta$, $\| v_1(s,\mu) \| \leqslant \delta$, $\| v_2(s,\mu) \| \leqslant \delta$, 则如下不等式成立:

$$\| G_i(u_1,v_1,t,\mu) - G_i(u_2,v_2,t,\mu) \| \leqslant \varepsilon \max_{0\leqslant s\leqslant t} \big[\| u_1(s,\mu) - u_2(s,\mu) \| + \| v_1(s,\mu) - v_2(s,\mu) \| \big], \quad i = 1, 2.$$

我们用 $\Phi(t,s,\mu)$ 记齐次方程组

$$\mu\frac{d\Phi}{dt} - F_z(t,\mu)\Phi + F_J(t,\mu)\int_s^t K_z(t,p,\mu)\Phi(p,s,\mu)dp,\ 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T \tag{5.32}$$

满足条件 $\Phi(s,s,\mu)=E_M$ ($M\times M$ 阶单位矩阵) 的矩阵解, 而以 $\Psi(t,s,\mu)$ 记类似的齐次方程组

$$\mu\frac{d\Psi}{dt} = f_z(t,\mu)\Psi + f_J(t,\mu)\int_s^t K_y(t,p,\mu)\Psi(p,s,\mu)dp,\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$$

满足条件 $\Psi(s,s,\mu)=E_m$ ($m\times m$ 阶单位矩阵) 的矩阵解.

显然, 当 $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T, 0<\mu\leqslant\mu_0$ 时有 $\|\Psi(t,s,\mu)\|\leqslant c$; 对于 $\Phi(t,s,\mu)$, 我们证明它满足如下估计:

$$\|\Phi(t,s,\mu)\|\leqslant c\Big[\mu+e^{-\kappa(t-s)/\mu}\Big],\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\quad 0<\mu\leqslant\mu_0.$$

为此, 代替 $\Phi(t,s,\mu)$ 的积分–微分方程 (5.32), 我们考虑如下的等价积分方程

$$\begin{aligned}\Phi(t,s,\mu) &= U(t,s,\mu)+\int_s^t\frac{1}{\mu}U(t,p,\mu)\Big[F_J(p,\mu)\int_s^p K_z(p,q,\mu)\Phi(q,s,\mu)dq\Big]dp\\ &\overset{\text{def}}{=} U(t,s,\mu)+\int_s^t H(t,p,\mu)\Phi(p,s,\mu)dp,\end{aligned}$$

其中 $U(t,s,\mu)$ 为矩阵初值问题

$$\mu\frac{dU}{dt}=F_z(t,\mu)U,\quad U(s,s,\mu)=E_M,\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$$

的解. 而 $H(t,p,\mu)=\dfrac{1}{\mu}\displaystyle\int_p^t U(t,q,\mu)F_J(q,\mu)K_z(q,p,\mu)dq$. 回想在第三章中 (见 (3.96)), 对于 $U(t,s,\mu)$ 我们曾证明了估计

$$\|U(t,s,\mu)\|\leqslant c\,e^{-\kappa(t-s)/\mu},\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\quad 0<\mu\leqslant\mu_0;$$

由此容易得出核 $H(t,p,\mu)$ 的有界性:

$$\|H(t,p,\mu)\|\leqslant c,\quad 0\leqslant p\leqslant t\leqslant T,\quad 0<\mu\leqslant\mu_0.$$

由核 $H(t,p,\mu)$ 的有界性, 即可推出它的预解式 $R(t,p,\mu)$ 的有界性. 利用 $R(t,p,\mu)$, 可将上面得到的关于 $\Phi(t,s,\mu)$ 的积分方程的解写成如下形式 (见 (3.57))

$$\Phi(t,s,\mu)=U(t,s,\mu)+\int_s^t R(t,p,\mu)U(p,s,\mu)dp.$$

由此以及 $U(t,s,\mu)$ 的指数式估计和 $R(t,p,\mu)$ 的有界性, 直接推出关于 $\Phi(t,s,\mu)$ 的所需要估计.

利用矩阵 $\Phi(t,s,\mu)$ 和 $\Psi(t,s,\mu)$, 我们可用如下的等价积分方程组 (参看 [11])

$$\begin{cases} u(t,\mu)=\displaystyle\int_0^t \frac{1}{\mu}\Phi(t,s,\mu)\Big[F_y(s,\mu)v(s,\mu)+F_J(s,\mu)\int_0^s K_y(s,p,\mu)v(p,\mu)dp \\ \qquad +G_1(u,v,s,\mu)\Big]ds \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\int_0^t \Big[K_1(t,s,\mu)v(s,\mu)+\frac{1}{\mu}\Phi(t,s,\mu)G_1(u,v,s,\mu)\Big]ds, \\ v(t,\mu)=\displaystyle\int_0^t \Psi(t,s,\mu)\Big[f_z(s,\mu)u(s,\mu)+f_J(s,\mu)\int_0^s K_z(s,p,\mu)u(p,\mu)dp \\ \qquad +G_2(u,v,s,\mu)\Big]ds \overset{\text{def}}{=} \displaystyle\int_0^t \Big[K_2(t,s,\mu)u(s,\mu)+\Psi(t,s,\mu)G_2(u,v,s,\mu)\Big]ds, \end{cases} \tag{5.33}$$

来代替满足初始条件 (5.31) 的方程组 (5.30), 其中

$$K_1(t,s,\mu)=\frac{1}{\mu}\Phi(t,s,\mu)F_y(s,\mu)+\int_s^t \frac{1}{\mu}\Phi(t,s,\mu)F_J(p,\mu)K_y(p,s,\mu)dp,$$

而 $K_2(t,s,\mu)$ 有类似的表达式.

像把方程组 (3.94) 变成 (3.102) 那样, 我们也把 (5.33) 变成类似于 (3.102) 那种形式的积分方程, 然后就像在定理 3.1 中那样运用逐次逼近法, 即可证明问题 (5.30), (5.31) 解的存在唯一性以及得出估计

$$\|u(t,\mu)\|\leqslant c\,\mu^{n+1},\ \|v(t,\mu)\|\leqslant c\,\mu^{n+1},\quad \text{对于 } 0\leqslant t\leqslant T,\ 0<\mu\leqslant\mu_0,$$

由此立即得到 (5.29). □

练习 对定理 5.1 进行详细证明.

注 对于 Fredholm 型 ($\alpha=T$) 的方程, 其余项估计也可以用类似的方法进行, 这只要补充要求在渐近构造和余项估计过程中产生的某些线性积分算子不位于谱上即可.

§18. 关于积分–微分方程解的某些特殊渐近性质

1. 问题的提出 在 §17 中得到的结果说明, 当满足稳定性条件 (5.26) 时, 对于满足初始条件的奇摄动积分–微分方程组, 其解的渐近性质完全类似于在第三章讨论的纯粹微分方程组奇摄动初始问题解的渐近性质. 这两个问题解的渐近展开也有同样的形式, 其差别仅在于积分–微分方程解的渐近展开式系数的方程比微分方程情况更为复杂些. 因此可以说, 在所考虑的问题中, 在方程中增加的积分项只导致构造渐近展开式算法的某些复杂性, 而并没有改变解的定性性质.

在本节将考虑另一种类型的问题, 这时在微分方程中增加积分项之后将导致解在性质上的*定性变化*. 为了运算简单起见, 我们将只讨论一个数值的线性方程; 虽然所考虑的现象对更复杂的方程也成立, 这在 B. Φ. 布图索夫的工作 [7, 8] 中有详细的讨论.

我们在区间 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上考虑线性微分方程

$$\mu\frac{dz}{dt} = -A(t)z + B(t), \tag{5.34}$$

其中 $A(t), B(t)$ 和 $z(t,\mu)$ 都是数值函数, 并假设 $A(t)$ 和 $B(t)$ 均为连续函数 (在下面构造解的渐近展开式时, 我们将假设它们是充分光滑的), 以及对 $0 \leqslant t \leqslant T$ 有 $A(t) > 0$.

对 $z(t,\mu)$ 在点 $t = T$ 处给出定解条件

$$z(T,\mu) = z^0. \tag{5.35}$$

由于 $A(t) > 0$, 因此问题 (5.34), (5.35) 的解当 $\mu \to 0$ 时, 显然在半开区间 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上趋于无穷.

现在我们在方程 (5.34) 中增加积分项 $\int_0^\alpha K(t,s)z(s,\mu)ds$, 这里 α 等于 t 或者 T, 而 $K(t,s)$ 为连续核 (下面将假设它是充分光滑的) . 为了确定起见, 我们将只考虑 $\alpha = t$ (当 $\alpha = T$ 时, 类似的结果也成立) . 我们有方程

$$\mu\frac{dz}{dt} = -A(t)z + \int_0^t K(t,s)z(s,\mu)ds + B(t). \tag{5.36}$$

于是问题 (5.36), (5.35) 的解 $z(t,\mu)$ 当 $\mu \to 0$ 时, 其性态于问题 (5.34), (5.35) 的解相比较完全是另一个样子, 即满足如下极限等式

$$\lim_{\mu\to 0} z(t,\mu) = \bar{z}_0(t), \quad 0 < t \leqslant T. \tag{5.37}$$

但是 $\bar{z}_0(t)$ 不是退化积分方程

$$0 = -A(t)\bar{z}(t) + \int_0^t K(t,s)\bar{z}(s)ds + B(t) \tag{5.38}$$

的解, 而是由某个具有 (5.38) 形式但自由项不同于 $B(t)$ 的积分方程所确定 (见下面的 (5.40)) ; 此外, 在点 $t = 0$ 的邻域中, 解 $z(t,\mu)$ 的性态像 $\frac{1}{\mu}\Pi z(t/\mu)$; 这里 $\Pi z(t/\mu)$ 是一个当 $t = 0$ 时不为零, 而当 $t > 0$ 时指数式衰减的边界层函数.

我们从定性上来说明如何产生这种现象. 对于方程 (5.36), 我们考虑一个具有无穷大 (当 $\mu \to 0$ 时) 初值的辅助初值问题, 即求方程 (5.36) 在 $t = 0$ 处满足给定条件

$$z(0,\mu) = \frac{a}{\mu}, \quad a \neq 0 \tag{5.39}$$

解的问题. 直观上, 显然这个问题的解在点 $t = 0$ 的某个小邻域中将接近于微分方程 $\mu\frac{dz}{dt} = -A(0)z$ 的解 $\frac{a}{\mu}e^{-A(0)t/\mu}$. 这个方程是从 (5.36) 得到的, 这只要在它的右端仅保留第一项, 并令 $t = 0$ (这对于具有无穷大初值的微分方程初值问题也同样成

立, 见 §16) . 由此还得出, 当 t 很小时 (例如, 当 t 为 $A\mu|\ln\mu| \overset{\text{def}}{=} \varepsilon(\mu)$ 的量阶, 这里 $A>0$ 为充分大的量), 在 $t=0$ 为无穷大量的解 $z(t,\mu)$ 成为有限的. 这时考虑到当 $t=0$ 时 $z(t,\mu)$ 为无穷大量, 于是在小区间 $[0,\varepsilon(\mu)]$ 上的积分 $\int_0^{\varepsilon(\mu)} K(t,s)z(s,\mu)ds$ 当 $\mu\to 0$ 时不等于零, 因此如果在积分中将 $z(t,\mu)$ 用它的近似表达式 $\frac{a}{\mu}e^{-A(0)t/\mu}$ 代替, 则可得出积分的渐近表示

$$\int_0^{\varepsilon(\mu)} K(t,s)z(s,\mu)ds = \frac{K(t,0)}{A(0)}a + \varepsilon_1(\mu),$$

其中当 $\mu\to 0$ 时有 $\varepsilon_1(\mu)\to 0$.

按照上述推理, 当 $t=\varepsilon(\mu)$ 时, 解 $z(t,\mu)$ 成为有限的, 而对于 $t>\varepsilon(\mu)$ (当 μ 很小时), 解 $z(t,\mu)$ 不会接近于退化方程 (5.38) 的解 $\overline{z}(t)$, 而是接近于方程

$$0 = -A(t)\overline{z}_0(t) + \int_0^t K(t,s)\overline{z}_0(s)ds + B(t) + \frac{K(t,0)}{A(0)}a \tag{5.40}$$

的解 $\overline{z}_0(t)$.

显然, 由于 $\overline{z}_0(t)$ 是线性地依赖于 a, 而 $z(T,\mu)$ 又接近于 $\overline{z}_0(T)$, 因此当然可以相信, 当适当选择 a 时, 问题 (5.36), (5.39) 的解 $z(t,\mu)$ 满足定解条件 (5.35).

注 注意到由于函数 $z(t,\mu)$ 本身当 $\mu\to 0$ 时有无穷大的初值, 因此积分项

$$\int_0^t K(t,s)z(s,\mu)ds$$

从当 $t=0$ 时为零变到当 $t=\varepsilon(\mu)$ 时为不等于零的量 (积分项的跳跃), 这完全类似于考虑在 §16 中的函数 $y(t,\mu)$ 的初始跳跃 (见定理 4.6 的注 2).

我们现在转到对问题 (5.36), (5.35) 的详细讨论.

2. 具有无穷大初始解值的辅助初值问题 对于方程 (5.36), 我们首先考虑它的带有无穷大 (当 $\mu\to 0$ 时) 初始解值的问题, 即在 $t=0$ 时满足给定条件

$$z(0,\mu) = \frac{a(\mu)}{\mu}, \tag{5.41}$$

这里 $a(\mu)$ 当 $\mu\to 0$ 时可以表示成 μ 的渐近幂级数形式

$$a(\mu) = a_{-1} + \mu a_0 + \cdots + \mu^{k+1}a_k + \cdots. \tag{5.42}$$

我们将求问题 (5.36), (5.41) 的如下形式解

$$\begin{aligned} z(t,\mu) = {} & \overline{z}_0(t) + \mu\overline{z}_1(t) + \cdots + \mu^k\overline{z}_k(t) + \cdots \\ & + \tfrac{1}{\mu}\Pi_{-1}z(\tau) + \Pi_0 z(\tau) + \cdots + \mu^k\Pi_k z(\tau) + \cdots, \tau = \tfrac{t}{\mu}. \end{aligned} \tag{5.43}$$

在 (5.43) 中, 项 $\frac{1}{\mu}\Pi_{-1}z(\tau)$ 的出现是与无穷大初始解值有关. 将级数 (5.43) 代入方程 (5.36), 并根据在 §17 中所陈述的算法, 将它写成如下形式

$$\begin{aligned}
&\mu\frac{d}{dt}\Big(\overline{z}_0(t)+\cdots+\mu^k\overline{z}_k(t)+\cdots\Big)+\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{1}{\mu}\Pi_{-1}z(\tau)+\Pi_0z(\tau)+\cdots+\mu^k\Pi_kz(\tau)+\cdots\Big)\\
&=-A(t)\big(\overline{z}_0(t)+\cdots+\mu^k\overline{z}_k(t)+\cdots\big)\\
&\quad-A(\tau\mu)\Big(\frac{1}{\mu}\Pi_{-1}z(\tau)+\Pi_0z(\tau)+\cdots+\mu^k\Pi_kz(\tau)+\cdots\Big)\\
&\quad+\int_0^t K(t,s)\big(\overline{z}_0(s)+\cdots+\mu^k\overline{z}_k(s)+\cdots\big)ds\\
&\quad+\mu\int_0^\infty K(t,\sigma\mu)\Big(\frac{1}{\mu}\Pi_{-1}z(\sigma)+\Pi_0z(\sigma)+\cdots+\mu^k\Pi_kz(\sigma)+\cdots\Big)d\sigma\\
&\quad-\mu\int_\tau^\infty K(\tau\mu,\sigma\mu)\Big(\frac{1}{\mu}\Pi_{-1}z(\sigma)+\Pi_0z(\sigma)+\cdots+\mu^k\Pi_kz(\sigma)+\cdots\Big)d\sigma+B(t).
\end{aligned}\tag{5.44}$$

将 (5.44) 的右端表示成 μ 的幂级数形式之后, 在等式 (5.44) 两端比较 μ 同次幂的系数 (而且把依赖于 τ 和依赖于 t 的项分开), 像前面曾不只一次做过那样, 即得确定 $\Pi_{k-1}z(\tau),\overline{z}_k(t)$, $k=0,1,\cdots$, 的方程. 用类似的方法将级数 (5.43) 代入初始条件 (5.41), 并用表达式 (5.42) 代替 $a(\mu)$, 然后比较 μ 的同次幂系数, 即可得到级数 (5.43) 中各项的初始条件. 对于 $\Pi_{-1}z(\tau)$ 可得微分方程 $\frac{d\Pi_{-1}z}{d\tau}=-A(0)\Pi_{-1}z$ 及初始条件 $\Pi_{-1}z(0)=a_{-1}$, 从而得到

$$\Pi_{-1}z(\tau)=a_{-1}\exp(-A(0)\tau),\quad \tau\geqslant 0.\tag{5.45}$$

对于 $\overline{z}_0(t)$ 可得积分方程

$$0=A(t)\overline{z}_0(t)+\int_0^t K(t,s)\overline{z}_0(s)ds+\int_0^\infty K(t,0)\Pi_{-1}z(\sigma)d\sigma+B(t).$$

将 $\Pi_{-1}z(\tau)$ 的表达式 (5.45) 代入此式之后, 可将这个方程写成

$$\overline{z}_0(t)=\int_0^t \overline{K}(t,s)\overline{z}_0(s)ds+f_0(t),\tag{5.46}$$

其中 $\overline{K}(t,s)=\frac{K(t,s)}{A(t)}$, $f_0(t)=\frac{\overline{K}(t,0)}{A(0)}a_{-1}+\frac{B(t)}{A(t)}$. 以 $\overline{R}(t,s)$ 记核 $\overline{K}(t,s)$ 的预解式. 于是方程 (5.46) 的解可写成 (见 (3.57))

$$\overline{z}_0(t)=f_0(t)+\int_0^t \overline{R}(t,s)f_0(s)ds.$$

将 $f_0(t)$ 的表达式代入上式之后即得

$$\overline{z}_0(t)=\frac{1}{A(0)}\left[\overline{K}(t,0)+\int_0^t R(t,s)\overline{K}(s,0)ds\right]a_{-1}+\left[\frac{B(t)}{A(t)}+\int_0^t \overline{R}(t,s)\frac{B(s)}{A(s)}ds\right].$$

由于 $\overline{R}(t,s)$ 满足已知的预解式方程 $\overline{R}(t,s)=\overline{K}(t,s)+\int_s^t \overline{R}(t,p)\overline{K}(p,s)dp$, 所以 a_{-1} 的系数等于 $\dfrac{\overline{R}(t,0)}{A(0)}$. 以 $\widetilde{z}_0(t)$ 记上式右端的第二项, 最后我们有 $\overline{z}_0(t)$ 的如下表达式

$$\overline{z}_0(t)=\frac{\overline{R}(t,0)}{A(0)}a_{-1}+\widetilde{z}_0(t). \tag{5.47}$$

所得到的 $\overline{z}_0(t)$ 对 a_{-1} 的线性依赖性将在下面基本问题 (5.36), (5.35) 的研究中用到.

接着可以顺序逐次确定 $\Pi_0 z(\tau)$, $\overline{z}_1(t)$, $\Pi_1 z(\tau)$, $\overline{z}_2(t)$, $\cdots$. 为了对每个 k 确定 $\Pi_k z(\tau)$, $k=1,2,\cdots$, 可得微分方程

$$\frac{d\Pi_k z}{d\tau}=-A(0)\Pi_k z+P_k(\tau)e^{-A(0)\tau}$$

以及初始条件

$$\Pi_k z(0)=a_k-\overline{z}_k(0)$$

($P_k(\tau)$ 为某些其幂次不超过 k 的关于 τ 的已知多项式). 由此得到

$$\Pi_k z(\tau)=\big(a_k-\overline{z}_k(0)\big)e^{-A(0)\tau}+\left[\int_0^\tau P_k(\sigma)d\sigma\right]e^{-A(0)\tau}. \tag{5.48}$$

为了对每个 k 确定函数 $\overline{z}_k(t)$, $k=1,2,\cdots$, 我们可得类似于 $\overline{z}_0(t)$ 的方程 (5.46) 的积分方程

$$\overline{z}_k(t)=\int_0^t \overline{K}(t,s)\overline{z}_k(s)ds+f_k(t), \tag{5.49}$$

其中

$$f_k(t)=\frac{1}{A(t)}\left[-\overline{z}'_{k-1}(t)+\sum_{i=-1}^{k-1}\frac{1}{(k-1-i)!}\frac{\partial^{(k-1-i)}K(t,0)}{\partial s^{k-1-i}}\int_0^\infty \sigma^{k-1-i}\Pi_i z(\sigma)d\sigma\right]. \tag{5.50}$$

因此方程 (5.49) 的解可以写成

$$\overline{z}_k(t)=f_k(t)+\int_0^t \overline{R}(t,s)f_k(s)ds.$$

由此及应用 (5.48) 和 (5.50) 之后, 不难看出 $\overline{z}_k(t)$ 线性地依赖于 a_{k-1}, 而且 a_{k-1} 的系数也像在 $\overline{z}_0(t)$ 的表达式 (5.47) 中 a_{-1} 的系数那样等于 $\dfrac{\overline{R}(t,0)}{A(0)}$, 亦即

$$\overline{z}_k(t)=\frac{\overline{R}(t,0)}{A(0)}a_{k-1}+\widetilde{z}_k(t), \tag{5.51}$$

这里 $\widetilde{z}_k(t)$ 为某个函数. 关于 $\overline{z}_k(t)$ 对 a_{k-1} 的这种依赖性也将在下面基本问题 (5.36), (5.35) 的研究中用到.

在假设 $A(t), B(t), K(t,s)$ 为充分光滑的函数之后, 我们可以确定级数 (5.43) 的系数直到包括下标为 n 的项, 并以 $Z_n(t,\mu)$ 记级数 (5.43) 的 n 阶部分和:

$$Z_n(t,\mu) = \frac{1}{\mu}\Pi_{-1}z(\tau) + \sum_{k=0}^{n}\mu^k\left[\overline{z}_k(t) + \Pi_k z(\tau)\right]. \tag{5.52}$$

定理 5.2 *存在常数 $\mu_0 > 0$ 和 $c > 0$, 使得当 $0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时, 问题 (5.36), (5.41) 存在唯一解 $z(t,\mu)$, 且满足不等式*

$$|z(t,\mu) - Z_n(t,\mu)| \leqslant c\mu^{n+1}, \quad 当\ 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5.53}$$

证明 解的存在性和唯一性由方程 (5.36) 的线性性得出. 为了证明 (5.53), 我们令 $u(t,\mu) = z(t,\mu) - Z_n(t,\mu)$. 将 $z = u + Z_n$ 代入方程 (5.36), 即得 $u(t,\mu)$ 的方程

$$\mu\frac{du}{dt} = -A(t)u + \int_0^t K(t,s)u(s,\mu)ds + H(t,\mu), \tag{5.54}$$

其中

$$H(t,\mu) = -A(t)Z_n(t,\mu) + \int_0^t K(t,s)Z_n(s,\mu)ds + B(t) - \mu\frac{dZ_n(t,\mu)}{dt}.$$

将 $Z_n(t,\mu)$ 的表达式 (5.52) 代入 $H(t,\mu)$ 的表达式, 在对应的项中做替换 $t = \tau\mu$, $s = \sigma\mu$, 以及应用 $\Pi_k z(\tau)$ 的方程, $k = -1, 0, \cdots, n$ 和 $\overline{z}_k(t)$ 的方程, $k = 0, 1, \cdots, n$ 之后, 不难得到估计

$$|H(t,\mu)| \leqslant c\mu^{n+1}, \quad 对\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 < \mu \leqslant \mu_0. \tag{5.55}$$

显然, 对于 $u(t,\mu)$ 的初始条件有 $u(0,\mu) = (\mu^{n+2}a_{n+1} + \cdots)/\mu$, 从而有

$$|u(0,\mu)| \leqslant c\mu^{n+1}, \quad 对\ 0 < \mu \leqslant \mu_0. \tag{5.56}$$

方程 (5.54) 的解可以写成

$$u(t,\mu) = \Phi(t,0,\mu)u(0,\mu) + \int_0^t \frac{1}{\mu}\Phi(t,s,\mu)H(s,\mu)ds, \tag{5.57}$$

其中 $\Phi(t,s,\mu)$ 为齐次方程

$$\mu\frac{d\Phi(t,s,\mu)}{dt} = -A(t)\Phi(t,s,\mu) + \int_s^t K(t,p)\Phi(p,s,\mu)dp, \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,$$

满足条件 $\Phi(s,s,\mu) = 1$ 的解. 在 §17 的第 2 段中, 对于 $\Phi(t,s,\mu)$ 曾得到不等式

$$|\Phi(t,s,\mu)| \leqslant c\left[\mu + \exp\left(-\frac{\kappa(t-s)}{\mu}\right)\right], \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,\ 0 < \mu \leqslant \mu_0. \tag{5.58}$$

利用不等式 (5.55), (5.56), (5.58), 从 (5.57) 直接得出

$$|u(t,\mu)| \leqslant c\mu^{n+1}, \quad 对\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 < \mu \leqslant \mu_0,$$

这就证明了 (5.53) 及定理 5.2 本身. □

3. 基本问题　我们现在回到基本问题 (5.36), (5.35). 为了求解这个问题, 我们利用在第 2 段中对辅助问题 (5.36), (5.41) 构造的渐近解. 我们用 $z(t,a,\mu)$ 记这个解. 我们选取 a 使得 $z(t,a,\mu)$ 满足条件 (5.35), 因此我们得到 a 的方程

$$z(T,a,\mu)=z^0. \tag{5.59}$$

我们将求这个方程的如下形式级数解:

$$a=a_{-1}+\mu a_0+\cdots+\mu^{k+1}a_k+\cdots.$$

为了确定系数 $a_{-1},a_0,\cdots$, 我们将上式代入 (5.59), 并用渐近展开式 (5.43) 代替精确解 $z(T,a,\mu)$, 亦即应用在 §§13,15,16 中求解边值问题时同样的方法. 由于在点 $t=T$ 处所有边界函数都有估计 $|\Pi_k z(T/\mu)|\leqslant c\exp(-\kappa T/\mu)$, $0<\kappa\leqslant A(0)$, 因此方程 (5.59) 取如下形式

$$\overline{z}_0(T)+\mu\overline{z}_1(T)+\cdots+\mu^k\overline{z}_k(T)+\cdots=z^0.$$

比较等式两端 μ 同次幂的系数, 并考虑到 $\overline{z}_k(T)$ 对 a_{k-1} 的依赖性 (见 (5.47) 和 (5.51)), 可得关于 $a_{-1},a_0,\cdots$ 的线性方程

$$\overline{z}_0(T)=\frac{\overline{R}(T,0)}{A(0)}a_{-1}+\widetilde{z}_0(T)=z^0, \tag{5.60}$$

$$\overline{z}_k(T)=\frac{\overline{R}(T,0)}{A(0)}a_{k-1}+\widetilde{z}_k(T)=0,\quad k=1,2,\cdots. \tag{5.61}$$

假设 $\overline{R}(T,0)\neq 0$, 于是方程 (5.60), (5.61) 关于 a_{-1},a_{k-1} 唯一可解. 将这些解记作 $\overline{a}_k$, $k=-1,0,1,\cdots$, 并构造由公式 (5.52) 确定的函数 $Z_n(t,\mu)$, 其中 $a_{-1}=\overline{a}_{-1},\cdots,a_n=\overline{a}_n$.

定理 5.3　*如果 $\overline{R}(T,0)\neq 0$, 那么存在常数 $\mu_0>0$ 和 $c>0$, 使得当 $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时, 问题 (5.36), (5.35) 存在唯一解 $Z(t,\mu)$, 且满足不等式*

$$|Z(t,\mu)-Z_n(t,\mu)|\leqslant c\,\mu^{n+1},\quad 对\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{5.62}$$

证明　首先我们相信, 问题 (5.36), (5.41) 的解 $z(t,a,\mu)$ 对参数 a 的导数当 $0\leqslant t\leqslant T$, $0<\mu\leqslant\mu_0$ 时满足如下的渐近表达式

$$\frac{\partial z(t,a,\mu)}{\partial a}=\frac{\partial\overline{z}_0}{\partial a}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\Pi_{-1}z}{\partial a}+\frac{\partial\Pi_0 z}{\partial a}+O(\mu). \tag{5.63}$$

实际上, 由方程 (5.36) 和初始条件 (5.41) 对参数 a 的求导即得 $\dfrac{\partial z}{\partial a}$ 的方程和初始条件

$$\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)=-A(t)\left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)+\int_0^t K(t,s)\frac{\partial z}{\partial a}ds,\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial a}\right|_{t=0}=\frac{1}{\mu}.$$

这个方程与原来的方程 (5.36) 是同一类型. 像在第 2 段中对问题 (5.36), (5.41) 本身那样对上述问题构造渐近解, 即得 (5.63), 而且有

$$\frac{\partial \overline{z}_0}{\partial a} = \frac{\overline{R}(t,0)}{A(0)}, \quad \left|\frac{\partial \Pi_i z}{\partial \partial a}\right| \leqslant c\exp\left(-\frac{\kappa t}{\mu}\right), \quad 0 < \kappa \leqslant A(0), \quad i = -1, 0.$$

由此及 (5.63) 得出 $\dfrac{\partial z(T,a,\mu)}{\partial a} = \dfrac{\overline{R}(t,0)}{A(0)} + O(\mu)$.

因此当 μ 充分小时有 $\dfrac{\partial z(T,a,\mu)}{\partial a} \neq 0$.

我们现在考虑方程 (5.36) 满足初始条件 $z(0,\overline{a}_{-1},\mu) = \dfrac{\overline{a}_{-1}}{\mu}$ 的解 $z(t,\overline{a}_{-1},\mu)$. 这时由于曾经选取 $\overline{a}_{-1}$ 使得 $\overline{z}_0(T) = z^0$, 因此当 $t = T$ 时有 $z(T,\overline{a}_{-1},\mu) = \overline{z}_0(T) + O(\mu) = z^0 + O(\mu)$. 从而解 $z(t,\overline{a}_{-1},\mu)$ 满足条件 (5.35) 精确到 $O(\mu)$. 由于 $\dfrac{\partial z(T,a,\mu)}{\partial a} \neq 0$, 因此存在而且是唯一的值 $a = \overline{a}(\mu) = \overline{a}_{-1} + O(\mu)$ 使得等式 $z(T,\overline{a}(\mu),\mu) = z^0$ 成立. 这就表示方程 (5.36) 满足初始条件 $Z(0,\mu) = \dfrac{\overline{a}(\mu)}{\mu}$ 的解 $Z(t,\mu)$ 满足条件 (5.35), 亦即 $Z(T,\mu) = z^0$. 于是定理 5.3 关于解的存在性和唯一性的结论得到证明.

我们现在来证明不等式 (5.62). 我们考虑当 $a = (\overline{a})_n \equiv \overline{a}_{-1} + \mu\overline{a}_0 + \cdots + \mu^{n+1}\overline{a}_n$ 时的解 $z(t,a,\mu)$. 由于方程 (5.60), (5.61), 其中 $k = 1, 2, \cdots, n+1$, 因此对于这个解当 $t = T$ 时有

$$z(T,(\overline{a})_n,\mu) = \overline{z}_0(T) + \mu\overline{z}_1(T) + \cdots + \mu^{n+1}\overline{z}_{n+1}(T) + O(\mu^{n+2}) = z^0 + O(\mu^{n+2}).$$

由此及 $\dfrac{\partial z(T,a,\mu)}{\partial a} \neq 0$ 得出不等式 $|\overline{a}(\mu) - (\overline{a})_n| \leqslant c\,\mu^{n+2}$, 亦即对于 $\overline{a}(\mu)$ 有渐近表达式 $\overline{a}(\mu) = \overline{a}_{-1} + \mu\overline{a}_0 + \cdots + \mu^{n+1}\overline{a}_n + O(\mu^{n+1})$ 成立. 于是由定理 5.2 直接推出不等式 (5.62). 定理 5.3 证毕. □

注 $\overline{R}(T,0) \neq 0$ 是定理 5.3 的重要条件. 若 $\overline{R}(T,0) = 0$, 则可分成两种情况进行讨论: 当 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时或者 $\overline{K}(t,0) \equiv 0$, 或者 $\overline{K}(t,0) \not\equiv 0$ 可以证明, 或者在问题 (5.36), (5.35) 解的渐近展开中应增加形如 $\dfrac{1}{\mu^k}\Pi_{-k}z(\tau)$ $(k > 1)$ 的边界项, 或者除了出现这种项外还应增加形如 $\dfrac{1}{\mu^{k-1}}\overline{z}_{-(k-1)}(t)$ 的项 (于是该解在整个区间 $[0, T]$ 上有 μ 的极点), 或者 (当选取特殊的 z^0 值时) 渐近展开保持 (5.43) 的形式. 对于所有这些情况, 读者不难类似于 $\overline{R}(T,0) \neq 0$ 情况那样进行详细的讨论.

第六章　小滞量微分–差分方程的奇异摄动问题

§19. 引论

本章将考虑一类像在第二章 ~ 第四章中研究过的奇摄动微分方程那样存在着渐近现象的方程. 这就是如下的*微分–差分方程*

$$\dot{y}(t) = F(y(t), y(t-\mu), \dot{y}(t-\mu), t, \mu) \tag{6.1}$$

这里 y 和 F 是 M 维的向量函数, $\dot{y}$ 表示导数 $\dfrac{dy}{dt}$. 在方程 (6.1) 中既含有未知函数 y 在自变量为 t 时的值, 也含有未知函数在自变量等于 $t-\mu$ 时的值, 这里量 μ 称为*偏差* (在 $\mu > 0$ 的情况时称为*滞量*), 它既可以是常量, 也可以是 t 的函数, 甚至可以是未知解 y 的函数. (6.1) 形式的方程称为*中立型偏差变元的方程* (参看 [63]).

我们将讨论当偏差 μ 为常量且为小参数的情况. 这时方程 (6.1) 的*基本初值问题*是: 确定 $t \geqslant 0$ 的连续函数, 使得当 $t > \mu$ 时一般说除点 $t = k\mu$, $k = 2, 3, \cdots$ 外处处满足方程 (6.1), 而当 $0 \leqslant t \leqslant \mu$ 时它等于某个给定的可微函数 $\varphi(t)$:

$$y|_{0 \leqslant t \leqslant \mu} = \varphi(t). \tag{6.2}$$

区间 $[0, \mu]$ 称为*初始集*, 而 $\varphi(t)$ 称为*初始函数*.

求解问题 (6.1), (6.2) 最自然的方法是所谓的 “分步法”, 这个方法容许用逐次积分无偏差微分方程的办法对问题进行求解 (在上面所给定义的意义下). 第一步 (当 $\mu \leqslant t \leqslant 2\mu$) 用已知函数 $\varphi(t-\mu)$ 代替方程 (6.1) 右端的函数 $y(t-\mu)$, 于是得微分

方程

$$\dot{y}(t)=F(y(t),\varphi(t-\mu),\dot{\varphi}(t-\mu),t,\mu),\ (\mu\leqslant t\leqslant 2\mu)$$

及初始条件

$$y(\mu)=\varphi(\mu).$$

用 $y=\varphi_1(t)$ 表示这个初值问题在区间 $[\mu,2\mu]$ 上的解之后, 可类似地得到第二步 (当 $2\mu\leqslant t\leqslant 3\mu$) 的初值问题

$$\dot{y}(t)=F(y(t),\varphi_1(t-\mu),\dot{\varphi}_1(t-\mu),t,\mu),\ (2\mu\leqslant t\leqslant 3\mu),$$

$$y(2\mu)=\varphi_1(2\mu).$$

继续这个过程, 可得问题 (6.1), (6.2) 在某个区间上的解, 这个区间可以是有限的, 也可能是无限的, 这要由 (6.1) 右端的性质来定. 不难看出所构造的解一般来说在 $t=k\mu,\ k=1,2,\cdots$ 处有角点, 即在这种点上解的导数可能有第一类间断.

如果偏差 μ 与所要确定的解的定义区间比较起来很小那么由于步数与 μ 的大小成反比而变得很大, 以致应用分步法成为很困难的事. 因此当 μ 很小时, 利用渐近方法求解问题 (6.1), (6.2) 就变得很有意义.

当 $\mu=0$ 时, 方程 (6.1) 变成常微分方程

$$\dot{y}(t)=F(y(t),y(t),\dot{y}(t),t,0),\tag{6.3}$$

其解由初始条件

$$y(0)=\varphi(0)\tag{6.4}$$

所决定, 因此一般来说是不满足初始条件 (6.2). 于是当 $\mu=0$ 时也像方程组 (3.18) 的情况那样 (见第三章), 出现丢掉定解条件的问题, 从而蕴涵着边界层现象.

当 μ 很小时方程 (6.1) 的渐近性质对某些更一般的方程也存在着, 这种方程在 А. Б. 瓦西利耶娃的 [15, 17], В. И. 罗日科夫 (В. И. Рожков) 的 [51, 52] 及其他作者的工作中都研究过 (详细文献可参看 [10]). 因此对小偏差 μ 构造问题 (6.1), (6.2) 解的渐近展开可以完全像奇摄动微分方程组初值问题 (第三章) 那样进行, 这种构造将在 §20 中讨论, 而余项估计在 §21 中给出.

§20. 构造问题 (6.1), (6.2) 解的渐近展开算法

我们首先考虑形式构造, 而不叙述实现这种构造的条件. 为了对问题 (6.1), (6.2) 应用在第三章所考虑的渐近方法, 我们将 (6.1), (6.2) 写成如下形式的方程组

$$z(t)=F(y(t),y(t-\mu),z(t-\mu),t,\mu),\quad \dot{y}=z,\quad \mu<t\leqslant T,\tag{6.5}$$

以及初始条件

$$z|_{0\leqslant t\leqslant\mu}=\dot{\varphi}(t),\quad y|_{0\leqslant t\leqslant\mu}=\varphi(t).\tag{6.6}$$

也像第三章那样, 我们将找问题 (6.5), (6.6) 如下形式的解 (x 既表示 z, 也表示 y)

$$x=\overline{x}(t,\mu)+\Pi x(\tau,\mu),\ \tau=t/\mu,\tag{6.7}$$

其中

$$\overline{x}(t,\mu)=\overline{x}_0(t)+\mu\overline{x}_1(t)+\cdots+\mu^k\overline{x}_k(t)+\cdots,\tag{6.8}$$

$$\Pi x(\tau,\mu)=\Pi_0x(\tau)+\mu\Pi_1x(\tau)+\cdots+\mu^k\Pi_kx(\tau)+\cdots.\tag{6.9}$$

我们将利用符号 [ ] 表示如下意义的偏差运算: 对任一变量 t 的函数 $v(t)$, 记号 $[v(t)]$ 表示 $v(t-\mu)$, 亦即 $[v(t)]\equiv v(t-\mu)$; 而对变量 τ 的函数 $w(\tau)$, 记号 $[w(\tau)]$ 表示 $w(\tau-1)$, 亦即 $[w(\tau)]\equiv w(\tau-1)$.

将 (6.7) 代入 (6.5), 并将所得等式写成

$$\overline{z}+\Pi z=\overline{F}+\Pi F,\quad \mu\frac{d\overline{y}}{dt}+\frac{d\Pi y}{d\tau}=\mu(\overline{z}+\Pi z),\tag{6.10}$$

这里 $\overline{F}$ 和 ΠF 用与第三章同样的原则确定:

$$\begin{aligned}\overline{F}&=F(\overline{y}(t,\mu),[\overline{y}(t,\mu)],[\overline{z}(t,\mu)],t,\mu),\\ \Pi F&=F(\overline{y}(\tau\mu,\mu)+\Pi y(\tau,\mu),[\overline{y}(\tau\mu,\mu)+\Pi y(\tau,\mu)],[\overline{z}(\tau\mu,\mu)+\Pi z(\tau,\mu)],\tau\mu,\mu)\\ &\quad -F(\overline{y}(\tau\mu,\mu),[\overline{y}(\tau\mu,\mu)],[\overline{z}(\tau\mu,\mu)],\tau\mu,\mu).\end{aligned}$$

在 (6.10) 中代替 $\overline{x}$ 和 Πx 用级数 (6.8) 和 (6.9) 代入, 然后将 $\overline{F}$ 和 ΠF 展成 μ 的幂级数, 于是对于 $\overline{F}$ 有级数

$$\overline{F}=\overline{F}_0+\mu\overline{F}_1+\cdots+\mu^k\overline{F}_k+\cdots,$$

其中

$$\begin{aligned}&\overline{F}_0=F(\overline{y}_0(t),\overline{y}_0(t),\overline{z}_0(t),t,0),\\ &\overline{F}_k=\overline{F}_y(t)\overline{y}_k(t)+\overline{F}_{[y]}(t)\overline{y}_k(t)+\overline{F}_{[z]}(t)\overline{z}_k(t)+F_k(t),\ k=1,2,\cdots\end{aligned}$$

矩阵 $\overline{F}_y(t)$, $\overline{F}_{[y]}(t)$, $\overline{F}_{[z]}(t)$ 的元素是在点 $(\overline{y}_0(t),\overline{y}_0(t),\overline{z}_0(t),t,0)$ 处进行计算的, 而向量函数 $F_k(t)$ 是通过 $\overline{y}_i(t)$, $\overline{z}_i(t),i=0,1,\cdots,k-1$ 用完全确定的方式表示的.

对于 ΠF 有级数

$$\Pi F=\Pi_0F+\mu\Pi_1F+\cdots+\mu^k\Pi_kF+\cdots,$$

其中

$$\Pi_0 F = F(\overline{y}_0(0)+\Pi_0 y(\tau), \overline{y}_0(0)+[\Pi_0 y(\tau)], \overline{z}_0(0)+[\Pi_0 z(\tau)], 0, 0)$$
$$-F(\overline{y}_0(0), \overline{y}_0(0), \overline{z}_0(0), 0, 0),$$
$$\Pi_k F = F_y(\tau)\Pi_k y(\tau) + F_{[y]}(\tau)[\Pi_k y(\tau)] + F_{[z]}(\tau)[\Pi_k z(\tau)] + G_k(\tau),\ k=1,2,\cdots$$

矩阵 $F_y(\tau)$, $F_{[y]}(\tau)$, $F_{[z]}(\tau)$ 的元素是在点 $(\overline{y}_0(0)+\Pi_0 y(\tau), \overline{y}_0(0)+[\Pi_0 y(\tau)], \overline{z}_0(0)+[\Pi_0 z(\tau)], 0, 0)$ 处进行计算的, 而向量函数 $G_k(\tau)$ 是通过 $\Pi_i y(\tau)$, $[\Pi_i y(\tau)]$, $[\Pi_i z(\tau)]$, $i=0,1,\cdots,k-1$ 用完全确定的方式表示的.

比较等式 (6.10) 两端关于 μ 同次幂的系数, 而且像老早那样, 将依赖于 t 和依赖于 τ 的各自分开, 于是即得确定 $\overline{x}_k(t)$, $\Pi_k x(\tau)$, $k=0,1,\cdots$ 的方程.

其次, 将 (6.7) 代入初始条件 (6.6) 得

$$\overline{z}(t,\mu)|_{0\leqslant t\leqslant\mu} + \Pi z(\tau,\mu)|_{0\leqslant\tau\leqslant 1} = \dot{\varphi}(t),$$

$$\overline{y}(t,\mu)|_{0\leqslant t\leqslant\mu} + \Pi y(\tau,\mu)|_{0\leqslant\tau\leqslant 1} = \varphi(t);$$

利用级数 (6.8), (6.9), 将这些等式写成

$$\begin{aligned}
\Pi_0 z(\tau) + \mu\Pi_1 z(\tau) + \cdots|_{0\leqslant\tau\leqslant 1} &= \dot{\varphi}(\tau\mu) - \overline{z}_0(\tau\mu) - \mu\overline{z}_1(\tau\mu) - \cdots \\
&= \{\dot{\varphi}(0) - \overline{z}_0(0)\} + \mu\{\ddot{\varphi}(0)\tau - \dot{\overline{z}}_0(0)\tau - \overline{z}_1(0)\} + \cdots \\
&\quad + \mu^k\{\frac{\varphi^{(k+1)}(0)\tau^k}{k!} - \sum_{i=0}^{k}\frac{\overline{z}_i^{(k-i)}(0)\tau^{k-i}}{(k-i)!}\} + \cdots,
\end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_0 y(\tau) + \mu\Pi_1 y(\tau) + \cdots|_{0\leqslant\tau\leqslant 1} &= \varphi(\tau\mu) - \overline{y}_0(\tau\mu) - \mu\overline{y}_1(\tau\mu) - \cdots \\
&= \{\varphi(0) - \overline{y}_0(0)\} + \mu\{\dot{\varphi}(0)\tau - \dot{\overline{y}}_0(0)\tau - \overline{y}_1(0)\} + \cdots \\
&\quad + \mu^k\{\frac{\varphi^{(k)}(0)\tau^k}{k!} - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{\overline{y}_i^{(k-i)}(0)\tau^{k-i}}{(k-i)!} - \overline{y}_k(0)\} + \cdots.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

我们将利用 (6.11), (6.12) 式来确定展开式 (6.8), (6.9) 全部系数得到初始条件.

对于 $\overline{x}_0(t)$, 由 (6.10) 有

$$\overline{z}_0(t) = \overline{F}_0 \equiv F(\overline{y}_0(t), \overline{y}_0(t), \overline{z}_0(t), t, 0), \quad \dot{\overline{y}}_0(t) = \overline{z}_0(t). \tag{6.13}$$

显然, 这个方程组是 (6.5) (或者原来方程组 (6.1) 本身) 的退化方程组, 亦即它是由 (6.5) 令 $\mu=0$ 得到的. 与 (6.5) 不同, 方程组 (6.13) 已不含有偏差. 如果消去 $\overline{z}_0(t)$, 则得到的关于 $\overline{y}_0(t)$ 的方程就与 (6.3) 完全一样, 而且显然这是一个没有对导函数 $\dot{\overline{y}}_0(t)$ 解出来的常微分方程组. 对于 $\overline{y}_0(t)$ 我们也给定像 (6.4) 那样的初始条件

$$\overline{y}_0(0) = \varphi(0). \tag{6.14}$$

求解问题 (6.13), (6.14) 即得 $\overline{y}_0(t),\overline{z}_0(t)$ (至于确定哪一个解以及选择的原则问题将在下一节的第 1 段给出).

从 (6.10) 可得 $\Pi_0 x(\tau)$ 的方程

$$\begin{cases}\Pi_0 z(\tau)=\Pi_0 F\equiv F(\overline{y}_0(0)+\Pi_0 y(\tau),\overline{y}_0(0)+[\Pi_0 y(\tau)],\overline{z}_0(0)+[\Pi_0 z(\tau)],0,0)\\ \qquad -F(\overline{y}_0(0),\overline{y}_0(0),\overline{z}_0(0),0,0),\\ \dfrac{\Pi_0 y}{d\tau}=0.\end{cases} \tag{6.15}$$

比较 (6.12) 中两端关于 μ 零次幂的系数即得 $\Pi_0 y(\tau)$ 在初始集上的值

$$\Pi_0 y(\tau)|_{0\leqslant\tau\leqslant 1}=\varphi(0)-\overline{y}_0(0)=0. \tag{6.16}$$

为了确定当 $\tau>1$ 时的函数 $\Pi_0 y(\tau)$, 我们必须求解 (6.15) 的第二组方程, 它在 $\tau=1$ 的初始条件由 (6.16) 即知为

$$\Pi_0 y(1)=0. \tag{6.17}$$

求解可得

$$\Pi_0 y(\tau)\equiv 0,\ 当\ \tau\geqslant 1; \tag{6.18}$$

因此有

$$\Pi_0 y(\tau)\equiv 0,\ 对\ \tau\geqslant 0.$$

从 (6.15) 的第一组方程可得 $\Pi_0 z(\tau)$ 的差分方程

$$\Pi_0 z(\tau)=F(\varphi(0),\varphi(0),\overline{z}_0(0)+[\Pi_0 z(\tau)],0,0)-F(\varphi(0),\varphi(0),\overline{z}_0(0),0,0). \tag{6.19}$$

比较 (6.11) 两端关于 μ 零次幂的系数, 并考虑到 $\overline{z}_0(t)$ 已经求出, 即得 $\Pi_0 z(\tau)$ 的初始条件

$$\Pi_0 z(\tau)|_{0\leqslant\tau\leqslant 1}=\dot{\varphi}(0)-\overline{z}_0(0). \tag{6.20}$$

对于任意 $\tau>1$ 问题 (6.19), (6.20) 的解可用分步法求出. 下一节将证明在一定条件下, $\Pi_0 z(\tau)$ 和其他 Π-函数具有类似于第三章关于边界函数所得到的指数式估计. 但是应当注意在定性上本章函数 $\Pi_k z(\tau)$ 的性质不同于第三章对应 Π-函数的性质. 在第三章中 Π-函数是光滑的, 而在这里不难从方程 (6.19) 看出, $\Pi_k z(\tau)$ 具有阶梯形性质, 亦即在 $\tau=1,2,3,\cdots$ 处有一类间断.

为了确定 $\overline{x}_k(t),\Pi_k x(\tau),k=1,2,\cdots$, 像通常那样我们得到一系列的线性方程组, 对于 $\overline{x}_k(t)$ 是微分方程组

$$\begin{cases}\overline{z}_k(t)=\overline{F}_k\equiv\overline{F}_y(t)\overline{y}_k(t)+\overline{F}_{[y]}(t)\overline{y}_k(t)+\overline{F}_{[z]}(t)\overline{z}_k(t)+F_k(t),\\ \dot{\overline{y}}_k(t)=\overline{z}_k(t);\end{cases} \tag{6.21}$$

而对于 $\Pi_k x(\tau)$ 是微分-差分方程组

$$\begin{cases}\Pi_k z(\tau) = \Pi_k F \equiv F_y(\tau)\Pi_k y(\tau) + F_{[y]}(\tau)[\Pi_k y(\tau)] + F_{[z]}(\tau)[\Pi_k z(\tau)] + G_k(\tau), \\ \dfrac{d\Pi_k y}{d\tau} = \Pi_{k-1} z(\tau).\end{cases} \tag{6.22}$$

为了求解这些方程组, 我们必须给出定解条件, 这可从 (6.11) 和 (6.12) 用如下办法求出. 像在第三章那样我们要求当 $\tau \to \infty$ 时有 $\Pi_k y(\tau) \to 0$, 于是由 (6.22) 的第二组方程当 $\tau > 1$ 时可得

$$\Pi_k y(\tau) = -\int_\tau^\infty \Pi_{k-1} z(s) ds, \text{ 当 } \tau \geqslant 1, \tag{6.23}$$

由此得到

$$\Pi_k y(1) = -\int_1^\infty \Pi_{k-1} z(s) ds. \tag{6.24}$$

现在比较 (6.12) 两端 μ^k 的系数即得

$$\Pi_k y(\tau)|_{0\leqslant\tau\leqslant 1} = \frac{\varphi^{(k)}(0)\tau^k}{k!} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\overline{y}_i^{(k-i)}(0)\tau^{k-i}}{(k-i)!} - \overline{y}_k(0). \tag{6.25}$$

在 (6.25) 中令 $\tau = 1$, 并考虑到 (6.24) 即得

$$\overline{y}_k(0) = \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\overline{y}_i^{(k-i)}(0)}{(k-i)!} + \int_1^\infty \Pi_{k-1} z(s) ds. \tag{6.26}$$

找出了 $\overline{y}_k(0)$ 之后, 由等式 (6.25) 函数 $\Pi_k y(\tau)$ 在初始集上就确定了, 因此 $\Pi_k y(\tau)$ 也就完全确定了.

对于 $\overline{z}_k(t)$ 显然不必给出定解条件. 求解问题 (6.21), (6.26) 即得 $\overline{y}_k(t), \overline{z}_k(t)$.

其次, 因为 $\Pi_k y(\tau)$ 已经由等式 (6.25), (6.23) 所确定, 所以从 (6.22) 的第一组方程即得关于 $\Pi_k z(\tau)$ 的纯粹差分方程, 其初始条件

$$\Pi_k z(\tau)|_{0\leqslant\tau\leqslant 1} = \frac{\varphi^{(k+1)}(0)\tau^k}{k!} - \sum_{i=0}^{k} \frac{\overline{z}_i^{(k-i)}(0)\tau^{k-i}}{(k-i)!} \tag{6.27}$$

可从 (6.11) 两端关于 μ^k 的系数等式得到.

总之, 我们可以逐次地确定级数 (6.8), (6.9) 的系数.

§21. 余项估计

1. 定理 6.1 的陈述 我们现在提出上一节的形式构造可以进行的条件. 像在第三章和第五章那样, 有两个问题是起着基本作用的, 即退化问题 (6.13), (6.14) 以及关于 $\Pi_0 z(\tau)$ 的问题 (6.19), (6.20).

在方程组 (6.13) 中消去 $\overline{z}_0(t)$ 之后, 即得 $\overline{y}_0(t)$ 的常微分方程组, 这时对 $\dot{\overline{y}}_0(t)$ 尚未解出:

$$\dot{\overline{y}}_0(t) = F(\overline{y}_0(t), \overline{y}_0(t), \dot{\overline{y}}_0(t), t, 0). \tag{6.28}$$

这个方程组在初始条件 (6.14) 之下或者有一个解, 或者有几个解, 也可能没有解.

I. 假设问题 (6.28), (6.14) 在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上有解, 并且令 $\overline{y}_0(t)$ 就是其中的一个解.

我们考虑矩阵 $\overline{F}_z(t)$, 它的元素 $\dfrac{\partial F^i}{\partial z^j}$, $i, j = 1, 2, \cdots, M$ 是在点

$$(\overline{y}_0(t), \overline{y}_0(t), \overline{z}_0(t), t, 0), \quad \overline{z}_0(t) \equiv \dot{\overline{y}}_0(t),$$

处进行计算的. 记矩阵 $\overline{F}_z(t)$ 的特征值为 $\overline{\lambda}_i(t), i = 1, 2, \cdots, M$, 我们要求这些特征值满足如下条件:

II.

$$|\overline{\lambda}_i(t)| < 1, \text{当 } 0 \leqslant t \leqslant T, i = 1, 2, \cdots, M. \tag{6.29}$$

这个条件在此起了像第三章中条件 (3.22) 那样的作用, 因此也称它为稳定性条件.

我们现在考虑差分问题 (6.19), (6.20). 对于目前考虑的情况, 方程组 (6.19) 起了像第三章中附加方程组 (3.43) 那样的作用. 显然, $\Pi_0 z = 0$ 是差分方程组 (6.19) 的奇点. 由于根据 (6.29) 有 $|\overline{\lambda}_i(0)| < 1$, $i = 1, 2, \cdots, M$, 因此这个奇点是渐近稳定的, 亦即对 $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ 当 $\| \Pi_0 z(\tau) \|$ 充分小时, 解 $\Pi_0 z(\tau)$ 对 $\tau > 1$ 仍然停留在这个奇点附近, 此外, 当 $\tau \to \infty$ 时还有 $\Pi_0 z(\tau) \to 0$. 这个结论的正确性可从下面引理 6.1 的证明中直接推出. 由于在初始集 $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ 上对 $\Pi_0 z(\tau)$ 给定的初值 $\dot{\varphi}(0) - \overline{z}_0(0)$ 一般来说不是很少, 因此也像在第三章和第五章那样, 我们要求满足条件:

III. 初值 $\dot{\varphi}(0) - \overline{z}_0(0)$ 属于奇点 $\Pi_0 z = 0$ 的影响域, 亦即当 $\tau \to \infty$ 时, 问题 (6.19), (6.20) 的解 $\Pi_0 z(\tau) \to 0$.

最后, 下面的条件给出函数 φ 和 F 的光滑性程度, 这种光滑性是渐近构造精度为 $O(\mu^{n+1})$ 的解所需要的. 为此我们首先考虑两个点集:

$$L_{01} = \{(y, [y], z, t, \mu) : y = \overline{y}_0(0); [y] = \overline{y}_0(0); z = \overline{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau), \tau \geqslant 0; t = 0; \mu = 0\},$$

$$L_{02} = \{(y, [y], z, t, \mu) : y = \overline{y}_0(t); [y] = \overline{y}_0(t); z = \overline{z}_0(t) \equiv \dot{\overline{y}}_0(t); 0 \leqslant t \leqslant T; \mu = 0\},$$

而以 L_0 记这两个点集的并集.

IV. 假设函数 $F(y, [y], z, t, \mu)$ 在集合 L_0 的某个 δ-管中, 对所有变量具有直到包括 $(n+2)$ 阶在内的连续偏导数, 而初始函数 $\varphi(t)$ 在初始集合 $0 \leqslant t \leqslant \mu$ 上具有直到

包括 $(n+2)$ 阶在内的连续导数 (δ-管的定义参看 §10 第 1 段).

按照上一节的做法, 我们求出级数 (6.8), (6.9) 直到包括号码 n 在内的项, 并用 $X_n(t,\mu)$ 记 (6.7) 展开式中的 n 阶部分和, 亦即

$$X_n(t,\mu)=\sum_{k=0}^{n}\mu^k(\overline{x}_k(t)+\Pi_k x(\tau)). \tag{6.30}$$

定理 6.1 当满足条件 I $\sim$ IV 时, 必存在常数 $\mu_0>0$ 和 $c>0$ 使得当 $0<\mu\leqslant\mu^0$ 时, 问题 (6.5), (6.6) 在区间 $0\leqslant t\leqslant T$ 上存在唯一解 $z(t,\mu),y(t,\mu)$, 而且满足不等式

$$\| x(t,\mu)-X_n(t,\mu)\|\leqslant c\mu^{n+1},\ \text{当}\ 0\leqslant t\leqslant T. \tag{6.31}$$

定理 6.1 的证明将在下面的第 4 段给出; 在此之前先在第 2 段介绍线性差分方程组理论的某些结果, 而在第 3 段证明边界函数的指数式估计.

2. 线性差分方程组的某些结果 我们考虑线性差分方程组的初值问题

$$\begin{aligned}&z(t)=A(t)z(t-h)+b(t),\ h<t\leqslant T,\\&z(t)|_{0\leqslant t\leqslant h}=\varphi(t),\end{aligned} \tag{6.32}$$

其中 $z(t),b(t)$ 和 $\varphi(t)$ 均为 M 维向量函数, $A(t)$ 为 $M\times M$ 阶矩阵.

令 $\Phi(t,s)$ 为齐次初值问题

$$\Phi(t,s)=A(t)\Phi(t-h,s),\ h\leqslant s+h<t\leqslant T,$$

$$\Phi(t,s)|_{s\leqslant t\leqslant s+h}=E_M,$$

的矩阵解 (E_M 为 $M\times M$ 单位方阵), 于是不难直接验证, 当 $mh<t\leqslant(m+1)h, m=1,2,\cdots$ 时, 初值问题 (6.32) 的解可以写成

$$z(t)=\Phi(t,0)\varphi(t-mh)+\sum_{i=0}^{m-1}\Phi(t,(m-i)h)b(t-ih). \tag{6.33}$$

利用分步法不难得到对于 $\Phi(t,lh)$ 当 $mh<t\leqslant(m+1)h, m=l+1,l+2,\cdots$ 时有

$$\Phi(t,lh)=A(t)A(t-h)A(t-2h)\cdots A(t-(m-l-1)h)$$

成立; 特别, 若 $A(t)=A=$ 常数, 则当 $mh<t\leqslant(m+1)h, m=l+1,l+2,\cdots$ 时有

$$\Phi(t,lh)=A^{m-l}. \tag{6.34}$$

如果矩阵 A 的特征值 $\lambda_i, i=1,2,\cdots,M$ 满足条件

$$|\lambda_i|<a<1,$$

则必存在常数 $c \geqslant 1$ 使得

$$\| A^l \| \leqslant ca^l,\ l = 0, 1, 2, \cdots. \tag{6.35}$$

这个结论在 [51] 中有证明.

3. 边界函数的估计

引理 6.1 对于边界函数 $\Pi_i x(\tau), i = 0, 1, \cdots, n$, 有不等式

$$\| \Pi_i x(\tau) \| \leqslant c\exp(-\kappa\tau), \quad 当\ \tau \geqslant 0. \tag{6.36}$$

成立, 其中 $c > 0$ 和 $\kappa > 0$ 为常数.

证明 在 §20 中我们曾得到 $\Pi_0 y(\tau) \equiv 0$, 而 $\Pi_0 z(\tau)$ 是差分问题 (6.19), (6.20) 的解. 这个差分问题可以利用分步法求解, 显然 $\Pi_0 z(\tau)$ 在每一步都是取常数值. 由条件 III 即知当 $\tau \to \infty$ 时有 $\Pi_0 z(\tau) \to 0$, 由此推出, 对 $\forall\delta > 0$, 存在自然数 $m_0 = m_0(\delta)$ 使得

$$\| \Pi_0 z(\tau) \| \leqslant \delta, \quad 当\ \tau \geqslant m_0. \tag{6.37}$$

我们将 (6.19) 在 $\tau > m_0$ 时写成

$$\Pi_0 z(\tau) = A[\Pi_0 z(\tau)] + G([\Pi_0 z(\tau)]), \tag{6.38}$$

这里

$$\begin{aligned} A &= \overline{F}_{[z]}(0) \equiv F_{[z]}(\varphi(0), \varphi(0), \overline{z}_0(0), 0, 0), G([\Pi_0 z(\tau)]) \\ &= F(\varphi(0), \overline{\varphi}(0), z_0(0) + [\Pi_0 z(\tau)], 0, 0) - F(\varphi(0), \varphi(0), \overline{z}_0(0), 0, 0) - A[\Pi_0 z(\tau)]. \end{aligned}$$

可以验证, $G(u)$ 具有如下性质: 对 $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\| G(u) \| \leqslant \varepsilon \| u \|, \quad 当\ \| u \| \leqslant \delta. \tag{6.39}$$

用 P_0 表示 $\Pi_0 z(\tau)$ 当 $m_0 < \tau \leqslant m_0 + 1$ 时的值; 我们证明, 若 m_0 选得充分大, 则当 $m < \tau \leqslant m + 1, m = m_0 + 1, m_0 + 2, \cdots$, 时 $\Pi_0 z(t)$ 满足不等式

$$\| \Pi_0 z(\tau) \| \leqslant c_1 \| P_0 \| \sigma^{m - m_0}, \tag{6.40}$$

这里 $c_1 > 0$ 和 $\sigma \in (0, 1)$ 均为与 m 无关的常数.

利用公式 (6.33) 和 (6.34), 方程 (6.38) 当 $m < \tau \leqslant m+1, m = m_0+1, m_0+2, \cdots$, 时可用如下等价的方程

$$\Pi_0 z(\tau) = A^{m-m_0} P_0 + \sum_{i=0}^{m-m_0-1} A^i G(\Pi_0 z(\tau - i - 1)). \tag{6.41}$$

代替. 由于根据 (6.29) 矩阵 $\overline{F}_{[z]}(0)$ 的特征值 $\overline{\lambda}_i(0)$ 满足条件 $|\overline{\lambda}_i(0)| < a < 1$, 这里 a 为某一常数, 所以由 (6.35) 即知存在常数 $c_2 \geqslant 1$, 使得 $\| A^l \| \leqslant c_2 a^l, l = 0, 1, 2, \cdots$.

在区间 $a < \sigma < 1$ 中固定任一数 σ, 令 $q = a/\sigma$ 并选取 $\varepsilon > 0$ 这样小, 使得不等式 $\beta \equiv \varepsilon c_2/\sigma(1-q) < 1$ 成立. 对于选定的 ε, 必存在 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 使得满足条件 (6.39); 对于这样的 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 必存在自然数 $m_0 = m_0(\delta)$, 使得不等式 (6.37) 成立.

我们现在取满足不等式 $c_1 \geqslant c_2/(1-\beta)$ 或者 $c_2 + \beta c_1 \leqslant c_1$ 的任意常数作为 c_1, 并用归纳法证明: 对这样选定的 σ, m_0 和 c_1 不等式 (6.40) 成立. 我们按步数的号码进行归纳. 当 $m = m_0 + 1$ 时从 (6.41) 可得

$$\Pi_0 z(\tau) = AP_0 + G(P_0),$$

由此即知当 $m_0 + 1 < \tau \leqslant m_0 + 2$ 时有

$$\begin{aligned} \| \Pi_0 z(\tau) \| &\leqslant c_2 a \| P_0 \| + \varepsilon \| P_0 \| = \| P_0 \| \sigma(c_2 a/\sigma + \varepsilon/\sigma) \\ &< \| P_0 \| \sigma \left(c_2 + \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{c_2}{1-q} c_1 \right) = \| P_0 \| \sigma(c_2 + \beta c_1) \leqslant c_1 \| P_0 \| \sigma, \end{aligned}$$

亦即当 $m_0 + 1 < \tau \leqslant m_0 + 2$ 时不等式 (6.40) 成立. 我们现在假设: 对 $m = m_0 + 1, m_0 + 2, \cdots, N-1$, (6.40) 都成立, 而后证明当 $m = N$ 时这个不等式也成立. 当 $m = N$ 时由 (6.41) 可得

$$\begin{aligned} \| \Pi_0 z(\tau) \| &\leqslant c_2 a^{N-m_0} \| P_0 \| + \sum_{i=0}^{N-m_0-1} c_2 a^i \varepsilon c_1 \sigma^{N-m_0-i-1} \| P_0 \| \\ &= \| P_0 \| \sigma^{N-m_0} (c_2 q^{N-m_0} + \frac{\varepsilon c_1 c_2}{\sigma} \sum_{i=0}^{N-m_0-1} q^i) \\ &< \| P_0 \| \sigma^{N-m_0} (c_2 + c_1 \frac{\varepsilon c_2}{\sigma(1-q)}) \\ &= \| P_0 \| \sigma^{N-m_0} (c_2 + \beta c_1) \leqslant c_1 \| P_0 \| \sigma^{N-m_0}, \quad \text{当} N < \tau < N+1. \end{aligned}$$

这就证明了不等式 (6.40). 从 (6.40) 得出当 $\tau > m_0 + 1$ 时有

$$\| \Pi_0 z(\tau) \| \leqslant c_1 \| P_0 \| \sigma^{\tau-1-m_0} = c_1 \| P_0 \| \sigma^{-1-m_0} \exp(-\kappa\tau), \tag{6.42}$$

这里 $\kappa = -\ln\sigma > 0$. 当 $0 \leqslant \tau \leqslant m_0 + 1$ 时, 问题 (6.19), (6.20) 的解 $\Pi_0 z(\tau)$ 以某一常数 c_3 为界, 亦即

$$\| \Pi_0 z(\tau) \| \leqslant c_3, \quad \text{当} 0 \leqslant \tau \leqslant m_0 + 1. \tag{6.43}$$

令 $c = \max\{c_1 \| P_0 \| \sigma^{-1-m_0}, c_3 \exp[\kappa(m_0+1)]\}$, 于是由 (6.42), (6.43) 即得

$$\| \Pi_0 z(\tau) \| \leqslant c \exp(-\kappa\tau), \quad \text{当} \tau \geqslant 0,$$

这就对 $i = 0$ 证明了不等式 (6.36). □

其次我们应用归纳法. 假设不等式 (6.36) 对 $i = 0, 1, \cdots, k-1$ 都正确, 那么由 (6.22) 即得

$$\| \Pi_k y(\tau) \| \leqslant \int_\tau^\infty \| \Pi_{k-1} z(s) \| ds \leqslant \int_\tau^\infty \| c\exp(-\kappa s) \| ds$$
$$= \frac{c}{\kappa} \exp(-\kappa\tau) \leqslant c\exp(-\kappa\tau), \ \tau \geqslant 1. \tag{6.44}$$

在初始集 $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ 上, 显然 $\Pi_k y(\tau)$ 是有界的 (见 (6.25)). 因此 (6.36) 对 $\Pi_k y(\tau)$ 成立. (关于常数 c 和 κ, 第三章 §10 第 3 段中的注 1 和 2 仍然有效).

对于 $\Pi_k z(\tau)$ 有差分方程 (见 (6.22))

$$\Pi_k z(\tau) = F_{[z]}(\tau)[\Pi_k z(\tau)] + \widetilde{G}_k(\tau), \tag{6.45}$$

其中 $\widetilde{G}_k(\tau) = F_y(\tau)\Pi_k y(\tau) + F_{[y]}(\tau)[\Pi_k y(\tau)] + G_k(\tau)$. 与推导第三章中不等式 (3.58) 完全一样, 可以证明：由归纳法假设, $G_k(\tau)$ 满足估计

$$\| G_k(\tau) \| \leqslant c\exp(-\kappa\tau), \quad 当\, \tau \geqslant 0.$$

由此及 (6.44) 即得 $\widetilde{G}_k(\tau)$ 的指数式估计

$$\| \widetilde{G}_k(\tau) \| \leqslant c\exp(-\kappa\tau), \quad 当\, \tau \geqslant 0. \tag{6.46}$$

方程 (6.45) 在初始条件 (6.27)

$$\Pi_k z(\tau)|_{0\leqslant\tau\leqslant1} = \frac{\varphi^{(k+1)}(0)\tau^k}{k!} - \sum_{i=0}^{k} \frac{\overline{z}_i^{(k-i)}(0)\tau^{k-i}}{(k-i)!} \equiv P_k(\tau)$$

之下的解当 $m < \tau \leqslant m+1, m = 1, 2, \cdots$, 时根据公式 (6.33) 可以写成

$$\Pi_k z(\tau) = \Phi(\tau, 0)P_k(\tau - m) + \sum_{i=0}^{m-1} \Phi(\tau, m-i)\widetilde{G}_k(\tau - i), \tag{6.47}$$

其中 $\Phi(\tau, s)$ 是齐次问题

$$\Phi(\tau, s) = F_{[z]}(\tau)\Phi(\tau - 1, s), \quad \Phi(\tau, s)|_{s\leqslant\tau\leqslant s+1} = E_M$$

的矩阵解. 类似推导 $\Pi_0 z(\tau)$ 的估计, 不难证明 $\Phi(\tau, s)$ 满足不等式

$$\| \Phi(\tau, s) \| \leqslant c\exp(-\kappa(\tau - s)), \quad 当\, 0 \leqslant s \leqslant \tau.$$

利用这个不等式及对 $\| \widetilde{G}_k(\tau) \|$ 的估计式 (6.46), 由 (6.47) 即得当 $\tau \geqslant 0$ 时有

$$\| \Pi_k z(\tau) \| \leqslant c\exp(-\kappa\tau) \| P_k(\tau - m) \| + \sum_{i-0}^{m-1} c\exp(-\kappa(\tau - m + i))c\exp(-\kappa(m - i))$$
$$\leqslant c\exp(-\kappa\tau) + c\tau\exp(-\kappa\tau) \leqslant c\exp(-\kappa\tau).$$

总之, 我们得到了 $\Pi_k z(\tau)$ 的不等式 (6.36), 从而完成了引理 6.1 的证明.

4. 定理 6.1 的证明 我们令

$$u(t,\mu) = z(t,\mu) - Z_n(t,\mu), \quad v(t,\mu) = y(t,\mu) - Y_n(t,\mu),$$

其中 $z(t,\mu), y(t,\mu)$ 是所要求的问题 (6.5), (6.6) 的解, 而 $Z_n(t,\mu), Y_n(t,\mu)$ 由公式 (6.30) 确定. 将 $z = Z_n + u, y = Y_n + v$ 代入 (6.5), (6.6) 即得 u 和 v 的方程组

$$\begin{cases} u = F(Y_n + v, [Y_n + v], [Z_n + u], t, \mu) - Z_n, \\ \dot{v} = u + (Z_n - Y_n), \ \mu < t \leqslant T, \end{cases} \tag{6.48}$$

及初始条件

$$\begin{cases} u|_{0\leqslant t\leqslant\mu} = \dot{\varphi}(t) - Z_n(t,\mu) = O(\mu^{n+1}), \\ v|_{0\leqslant t\leqslant\mu} = \varphi(t) - Y_n(t,\mu) = O(\mu^{n+1}). \end{cases} \tag{6.49}$$

于是为了证明定理 6.1 只需要证明当 $\mu \in (0,\mu_0]$ 充分小时, 问题 (6.48), (6.49) 在区间 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上有唯一满足不等式

$$\| u(t,\mu) \| \leqslant c\mu^{n+1}, \quad \| v(t,\mu) \| \leqslant c\mu^{n+1}, \tag{6.50}$$

的解.

我们首先考虑表达式

$$H_1(t,\mu) = F(Y_n(t,\mu), [Y_n(t,\mu)], [Z_n(t,\mu)], t, \mu) - Z_n(t,\mu),$$
$$H_2(t,\mu) = Z_n(t,\mu) - Y_n(t,\mu) = \mu^n \Pi_n z\left(\frac{t}{\mu}\right).$$

完全与第三章一样 (见 (3.89)), 当 μ 充分小时不难得到对 $H_1(t,\mu)$ 的估计

$$\| H_1(t,\mu) \| \leqslant c\mu^{n+1}, \ 当\ 0 \leqslant t \leqslant T, \ 0 < \mu \leqslant \mu_0. \tag{6.51}$$

对于 $H_2(t,\mu)$, 由 (6.36) 即得估计

$$\| H_2(t,\mu) \| \leqslant c\mu^n \exp\left(\frac{\kappa t}{\mu}\right), \ 当\ 0 \leqslant t \leqslant T, \ 0 < \mu \leqslant \mu_0. \tag{6.52}$$

(关于常数 μ_0, §10 的第 3 段注 4 仍然有效).

我们将 (6.48) 写成

$$\begin{cases} u = F_y(t,\mu)v + F_{[y]}(t,\mu)[v] + F_{[z]}(t,\mu)[u] + G(v,[v],[u],t,\mu), \\ \dot{v} = u + H_2(t,\mu), \end{cases} \tag{6.53}$$

其中矩阵 $F_y(t,\mu), F_{[y]}(t,\mu), F_{[z]}(t,\mu)$ 的元素是在点 $(\overline{y}_0(t), \overline{y}_0(t), \overline{z}_0(t)+[\Pi_0 z(\tau)], t, 0)$ 处进行计算的, 而

$$G(v,[v],[u],t,\mu) = F(Y_n+v,[Y_n+v],[Z_n+u],t,\mu) - Z_n - F_y(t,\mu)v \\ -F_{[y]}(t,\mu)[v] - F_{[z]}(t,\mu)[u].$$

函数 G 具有如下两条性质:

1. 当 $0 \leqslant t \leqslant T, 0 < \mu \leqslant \mu_0$ 时有

$$\| G(0,0,0,t,\mu) \| = \| H_1(t,\mu) \| \leqslant c\mu^{n+1}.$$

2. 对 $\forall \varepsilon > 0$,∃ 常数 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 和 $\mu_0 = \mu_0(\varepsilon)$ 使得只要 $\| v_1 \| \leqslant \delta$, $\| [v_1] \| \leqslant \delta, \| [u_1] \| \leqslant \delta, \| v_2 \| \leqslant \delta, \| [v_2] \| \leqslant \delta, \| [u_2] \| \leqslant \delta, 0 < \mu \leqslant \mu_0$, 则有

$$\| G(v_1,[v_1],[u_1],t,\mu) - G(v_2,[v_2],[u_2],t,\mu) \| \leqslant \varepsilon(\| v_1 - v_2 \| \\ + \| [v_1 - v_2] \| + \| [u_1 - u_2] \|). \tag{6.54}$$

这条性质容易验证, 只要将有限增量公式用于 (6.54) 左端的差, 并注意到, 当 $\| v \|, \| [v] \|, \| [u] \|, \mu_0$ 充分小时, $\| G_v \| = \| F_y(Y_n+v,[Y_n+v],[Z_n+u],t,\mu) - F_y(t,\mu) \|, \| G_{[v]} \|$ 和 $\| G_{[u]} \|$ 都可以任意小.

以 $U(t,s,\mu)$ 表示齐次初值问题

$$\begin{cases} U(t,s,\mu) = F_{[z]}(t,\mu)U(t-\mu,s,\mu), & \mu \leqslant s+\mu < t \leqslant T, \\ U(t,s,\mu)|_{s \leqslant t \leqslant s+\mu} = E_M. \end{cases} \tag{6.55}$$

的矩阵解. 对于 $U(t,s,\mu)$, 类似于第三章的估计式 (3.96) 可以证明有指数式估计

$$\| U(t,s,\mu) \| \leqslant c\exp(-\frac{\kappa(t-s)}{\mu}),\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,\ 0 < \mu \leqslant \mu_0. \tag{6.56}$$

为此我们利用类似于引理 3.2 的如下引理:

引理 6.2 设 $A(t)$ 为连续矩阵, 其特征值 $\lambda_i(t)$ 满足不等式

$$\| \lambda_i(t) \| < a^2 < 1,\ 当\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ i = 1,2\cdots,M. \tag{6.57}$$

那么当 $\mu \in (0,\mu_0]$ 充分小时, 齐次初值问题

$$\begin{cases} W(t,s,\mu) = A(t)W(t-\mu,s,\mu), & \mu \leqslant s+\mu < t \leqslant T, \\ W(t,s,\mu)|_{s \leqslant t \leqslant s+\mu} = E_M. \end{cases} \tag{6.58}$$

的矩阵解满足估计

$$\| W(t,s,\mu) \| \leqslant c\exp(-\frac{\sigma(t-s)}{\mu}),\ 当\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T,$$

其中 $\sigma = -\ln a > 0$.

可以完全类似于引理 3.2 的证明对这条引理进行证明.

由于矩阵 $F_{[z]}(t,\mu)$ 的特征值在点 $t=0$ 的某个邻域中, 一般来说, 不满足不等式 (6.57), 因此引理 6.2 不能直接应用于方程组 (6.55). 但是通过类似于第三章中在得到估计式 (3.96) 时所进行的讨论, 可以证明估计 (6.56)的正确性.

利用矩阵 $U(t,s,\mu)$ 和公式 (6.33), 对 $m\mu < t \leqslant (m+1)\mu,\ m=1,2,\cdots$, 我们用等价的方程

$$u(t,\mu) = U(t,0,\mu)O(\mu^{n+1}) + \sum_{i=0}^{m-1} U(t,(m-i)\mu,\mu)[F_y(t-i\mu,\mu)v(t-i\mu,\mu)$$

$$+F_{[y]}(t-i\mu,\mu)v(t-i\mu-\mu,\mu)+G(v(t-i\mu,\mu),v(t-i\mu-\mu,\mu),u(t-i\mu-\mu,\mu),t-i\mu,\mu)] \tag{6.59}$$

代替 (6.53) 的第一组方程及其初始条件 (6.49). 而 (6.53) 的第二组方程当 $t \geqslant \mu$ 时用等价的积分方程

$$v(t,\mu) = v(\mu,\mu) + \int_\mu^t u(s,\mu)ds + \int_\mu^t H_2(s,\mu)ds$$

代替. 由于据 (6.52) 有 $\int_\mu^t H_2(s,\mu)ds = O(\mu^{n+1})$, 而根据 (6.49) 有 $v(t,\mu) = O(\mu^{n+1})$ 及 $u(t,\mu) = O(\mu^{n+1})$, 当 $0 \leqslant t \leqslant \mu$, 因此上面的积分方程可写成

$$v(t,\mu) = \int_0^t u(s,\mu)ds + O(\mu^{n+1}), \tag{6.60}$$

我们将在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上而不是在 $\mu \leqslant t \leqslant T$ 研究这个积分方程.

将 (6.60) 的函数 v 代入 (6.59) 即得当 $m\mu < t \leqslant (m+1)\mu, m=1,2,\cdots$ 时, 对 $u(t,\mu)$ 的方程

$$\begin{aligned} u(t,\mu) = {} & U(t,0,\mu)O(\mu^{n+1}) + \sum_{i=0}^{m-1} U(t,(m-i)\mu,\mu)\cdot \\ & \left[F_y(t-i\mu,\mu)\int_0^{t-i\mu} u(s,\mu)ds + F_{[y]}(t-i\mu,\mu)\int_0^{t-i\mu-\mu} u(s,\mu)ds \right. \\ & +G\left(\int_0^{t-i\mu} u(s,\mu)ds, \int_0^{t-i\mu-\mu} u(s,\mu)ds, u(t-i\mu-\mu,\mu), t-i\mu,\mu\right) \\ & \left. +O(\mu^{n+1})\right]. \end{aligned}$$

考虑到初始条件 (6.49), 可将此方程写成

$$u(t,\mu) = \int_0^t K(t,s,\mu)u(s,\mu)ds + Q(u,t,\mu), \tag{6.61}$$

这里

$$K(t,s,\mu)=\begin{cases}0, \quad \text{当 } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant \mu;\\ F_y(t,\mu), \quad \text{当 } t-\mu<s\leqslant t,\ m\mu<t\leqslant (m+1)\mu,\ m=1,2,\cdots;\\ \sum\limits_{i=0}^{l-1}U(t,(m-i)\mu,\mu)[F_y(t-i\mu,\mu)+F_{[y]}(t-i\mu,\mu)]\\ \qquad +U(t,(m-l)\mu,\mu)F_y(t-l\mu,\mu),\ \text{当 } t-(l+1)\mu<s\leqslant t-l\mu,\\ \qquad l=1,\cdots,m-1;\ m\mu<t\leqslant (m+1)\mu,\ m=1,2,\cdots;\\ \sum\limits_{i=0}^{m-1}U(t,(m-i)\mu,\mu)[F_y(t-i\mu,\mu)+F_{[y]}(t-i\mu,\mu)],\\ \qquad \text{当 } 0\leqslant s\leqslant t-m\mu,\ m\mu<t\leqslant (m+1)\mu,\ m=1,2,\cdots;\end{cases}$$

$$Q(u,t,\mu)=u(t,\mu)+O(\mu^{n+1}), \quad \text{当} 0\leqslant t\leqslant \mu;$$

$$Q(u,t,\mu)=U(t,0,\mu)O(\mu^{n+1})+\sum_{i=0}^{m-1}U(t,(m-i)\mu,\mu)\left[G\left(\int_0^{t-i\mu}u(s,\mu)ds,\right.\right.$$

$$\left.\left.\int_0^{t-i\mu-\mu}u(s,\mu)ds,u(t-i\mu-\mu,\mu),t-i\mu,\mu\right)+O(\mu^{n+1})\right],$$

$$\text{当 } m\mu<t\leqslant (m+1)\mu,\ m=1,2,\cdots.$$

因为根据 (6.56) 当 $m\mu<t\leqslant (m+1)\mu,\ m=1,2,\cdots;i=0,1,\cdots,m-1$, 时有

$$\| U(t,(m-i)\mu,\mu) \|\leqslant c\exp(-\frac{\kappa(t-(m-i)\mu)}{\mu})\leqslant c\exp(-\kappa i); \tag{6.62}$$

而当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时有 $\| F_y(t,\mu) \|\leqslant c, \| F_{[y]}(t,\mu) \|\leqslant c$, 所以以 $e^{-\kappa}<1$ 为公比的递减几何级数就成为 $K(t,s,\mu)$ 表达式右端求和项的强级数, 从而有

$$\| K(t,s,\mu) \|\leqslant c, \text{当 } 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,\ 0<\mu\leqslant \mu_0. \tag{6.63}$$

利用估计式 (6.62), 于是据函数 G 的两条性质不难证明积分算子 $Q(u,t,\mu)$ 具有两条类似的性质:

1. 当 $0\leqslant t\leqslant T, 0<\mu\leqslant \mu_0$ 时, $\| Q(0,t,\mu) \|\leqslant c\mu^{n+1}$;

2. 对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists$ 常数 $\delta=\delta(\varepsilon)$ 和 $\mu_0=\mu_0(\varepsilon)$ 使得只要 $\| u_1(t,\mu) \|\leqslant \delta$, $\|u_2(t,\mu)\|\leqslant \delta$, 当 $0\leqslant t\leqslant T,\ 0<\mu\leqslant \mu_0$ 时则有

$$\| Q(u_1,t,\mu)-Q(u_2,t,\mu) \|\leqslant \varepsilon\max_{0\leqslant t\leqslant T}\| u_1(t,\mu)-u_2(t,\mu) \|.$$

根据 (6.63), 核 $K(t,s,\mu)$ 的预解式 $R(t,s,\mu)$ 也是有界的. 利用 $R(t,s,\mu)$ 我们可用等价的方程

$$u(t,\mu)=Q(u,t,\mu)+\int_0^t R(t,s,\mu)Q(u,s,\mu)ds\equiv S(u,t,\mu) \tag{6.64}$$

代替 (6.61). 显然积分算子 $S(u,t,\mu)$ 也具有像 $Q(u,t,\mu)$ 那样的两条性质, 亦即当 $\| u \|, \mu$ 充分小时它是一个压缩算子. 于是应用逐次逼近法, 不难证明在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 上 (6.64) 存在唯一解 $u(t,\mu)$ 且满足估计

$$\| u(t,\mu) \| \leqslant c\mu^{n+1}, \text{ 当 } 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 < \mu \leqslant \mu_0. \tag{6.65}$$

根据 (6.65), 由 (6.60) 直接得到 $v(t,\mu)$ 同样的估计. 定理 6.1 证毕.

注 1. 上面所进行的研究说明, 问题 (6.5), (6.6) 解的渐近展开以及构造这个展开的的算法完全类似于在第三章研究的微分方程组奇摄动初值问题 (3.18), (3.19) 解的渐近展开及其构造算法. (6.5) 的第一组方程类似于在导数上含有小参数的 (3.18) 的第一组方程. (6.5) 的第二组方程对应于 (3.18) 第二组方程的特殊情形, 即当 $f(z,y,t) = z$ 时的情形. 当 (3.18) 中的 $f(z,y,t)$ 是任一函数时, 与方程组 (3.18) 类似的是比 (6.5) 更为一般的微分-差分方程组

$$z = F(y,[y],[z],t,\mu), \quad \dot{y} = f(y,[y],[z],t,\mu);$$

对此我们可以构造它的初值问题

$$z|_{0\leqslant t\leqslant \mu} = \varphi(t), \quad y|_{0\leqslant t\leqslant \mu} = \psi(t)$$

的解的渐近展开.

2. 我们现在转到方程组 (6.5) 右端不含 $\dot{y}(t-\mu)$ 的特殊情况, 亦即 $F(y(t),y(t-\mu),\dot{y}(t-\mu),t,\mu) \equiv F(y(t),y(t-\mu),t,\mu)$. 这时解 $y(t,\mu)$ 具有通常的特性, 即对 $t > \mu, y(t,\mu)$ 有连续的导数. 至于渐近性质这时边界函数仅在有限多步不为零, 而后恒等于零. 实际上, 确定 $\Pi_0 z(\tau)$ 的方程 (像在一般情况下那样, 对 $\tau \geqslant 0$ 有 $\Pi_0 y(\tau) \equiv 0$) 对 $\tau > 1$ 为

$$\Pi_0 z(\tau) = F(\varphi(0),\varphi(0),0,0) - F(\varphi(0),\varphi(0),0,0),$$

亦即当 $\tau > 1$ 时有

$$\Pi_0 z(\tau) \equiv 0,$$

而当 $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ 时像在一般情况那样

$$\Pi_0 z(\tau) = \dot{\varphi}(0) - \overline{z}_0(0) = \dot{\varphi}(0) - F(\varphi(0),\varphi(0),0,0).$$

其次, $\Pi_1 y(\tau)|_{0\leqslant \tau\leqslant 1} = \dot{\varphi}(0)\tau - \dot{\overline{y}}_0(0)\tau - \overline{y}_1(0)$, 而对于 $\tau > 1$ 有

$$\Pi_1 y(\tau) = -\int_\tau^\infty \Pi_0 z(s) ds \equiv 0.$$

因此对 $\tau \geqslant 0$ 有 $\Pi_0 y(\tau) \equiv 0$, 而 $\Pi_0 z(\tau)$ 和 $\Pi_1 y(\tau)$ 仅在 $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ 上不等于零, 当 $\tau > 1$ 时恒等于零.

练习 证明当 $\tau > k$ 时有 $\Pi_k y(\tau) \equiv 0$, 而当 $\tau > k+1$ 时有 $\Pi_k z(\tau) = 0$.

参考文献

[1] Аносов Д. В., Определьных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, Матем. сб. **50**, № 3 (1960), 229 334.

[2] Багирова Н. Х., О зависимости решений задач вариационного исчисления от малого параметра, Вестник МГУ, матем., механ., № 1 (1966), 33—42.

[3] Багирова Н. Х., Васильева А.Б., Иманалиев М.И., К вопросу об асимптотическом решении задачи оптимального управления, Дифф. уравнения **3**, № 11 (1967), 1895—1902.

[4] Березин И. С., Жидков Н.П., Методы вычислений, т. 2,《Наука》, 1966.

[5] Боглаев Ю. П., О двухточечной задаче для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром при производной, Журн.выч. матем. и матем. физ. **10**, № 4 (1970), 958—968.

[6] Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю.А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1963.

[7] Бутузов В. Ф., К вопросу об асимптотике решений интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при производной, Дифф. уравнения **2**, № 3 (1966), 391 406.

[8] Бутузов В. Ф., Асимптотика решения одной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с малым параметром при производной, Дифф. уравнения **4**, № 3 (1968), 491—507.

[9] Бутузов В. Ф., Васильева А.Б., Дифференциальные и разностные системы уравнений с малым параметром в случае, когда невозмущенная (вырожденная) система находится на спектре, Дифф. уравнения **6**, № 4 (1970), 650—664.

[10] Бутузов В. Ф., Васильева А.Б., Федорюк М. В., Асимптотические методы

в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, 《Итоги науки. Матем. анализ, 1967》, ВИНИТИ АН СССР, М, 1969.

[11] Быков Я. В., О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений, Изд-во Кирг. ун-та, 1957.

[12] Вазов В., Асимптотические разложения решений дифференциальных уравнений, 《Мир》, 1968.

[13] Васильева А. Б., Построение равномерного приближения для решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, Матем. сб. **50**, № 1 (1960), 43—58.

[14] Васильева А. Б., Асимптотика решений некоторых краевых задач для уравнений с малым параметром при старшей производной, ДАН **135**, № 6 (1960), 1303—1306.

[15] Васильева А. Б., Уравнение нейтрального типа с малым запаздыванием, ДАН **145**, № 3 (1962), 495—497.

[16] Васильева А. Б., Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, УМН **18**, № 3 (1963), 15—86.

[17] Васильева А. Б., О соответствии между некоторыми свойствами решений линейных разностных систем и систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Тр. сем. по теории дифф. уравнений с отклоняющимся аргументом, **5**, Изд-во ун-та Дружбы народов, 1967, 21—44.

[18] Васильева А. Б., К вопросу о близких к разрывным решениях в системах с малым параметром при производных условно устойчивого типа, Дифф. уравнения **8**, № 9 (1972), 1560—1568.

[19] Васильева А. Б., Багирова Н. Х., Асимптотика решений дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, определяемых различными дополнительными условиями, Уч. зап. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем. и хим. наук, № 4 (1962), 3—17.

[20] Васильева А. Б., Зимин А. Б., Асимптотика решений некоторых классов дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, Вестник МГУ, матем., механ. № 4 (1964), 21—29.

[21] Васильева А. Б., Плотников А. А., Уравнения нейтрального типа с малым запаздыванием в критических случаях, Тр. V Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 1, изд. Ин-та матем. АН УССР, 1970, 142—148.

[22] Васильева А. Б., Тупчиев В. А., О периодических решениях систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, близких к разрывным, ДАН **178**, № 4 (1968), 767—770.

[23] Васильева А. Б., Тупчиев В. А., Яркин А. Н., Периодические решения систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных, близкие к

разрывным, Тр. V Международной конференции по нелинейным колебаниям, т. 1, изд. И-та матем. АН УССР, 1970, 149—157.

[24] Вишик М. И., Люстерник Л.А., Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН **12**, № 5 (1957), 3—122.

[25] Вишик М. И., Люстерник Л.А., Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений, УМН **15**, № 3 (1960), 3—80.

[26] Вишик М. И., Люстерник Л.А., О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, ДАН **132**, № 6 (1960), 1242—1245.

[27] Волосов В. М., Нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с малым параметром при старшей производной, Матем. сб. **30** (72), № 2 (1952), 245—270.

[28] Волосов В. М., Моргунов Б.И., Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем, изд. МГУ, 1971.

[29] Галахов М. А., Решения дифференциальных уравнений с малым параметром, имеющие в пределе разрыв, Журн. выч. матем. и матем. физ. **9**, № 1 (1969), 96—107.

[30] Гантмахер Ф. Р., Теория матриц,《Наука》,1967.

[31] Градштейн И. С., Применение теории устойчивости Ляпунова к теории дифференциальных уравнений с малыми множителями при производных, Матем. сб. **32**, (74), № 2 (1953), 263—286.

[32] Еругин Н. П., Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений, 《Наука и техника》, Минск, 1970.

[33] Зимин А. Б., Задача Коши для линейного уравнения n-го порядка с малым параметром при старшей производной в случае сингулярных начальных данных, Дифф. уравнения **6**, № 5 (1970), 861—870.

[34] Иманалиев М. И., Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем, 《Илим》, Фрунзе, 1972.

[35] Касымов К. А., Об асимптотике решения задачи Коши с большими начальными условиями для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, содержащего малый параметр, УМН **17**, № 5 (1962), 187—188.

[36] Касымов К. А., Асимптотическое поведение решений задачи Коши с начальным скачком для системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производной, Сб. Уравнения матем. физ. и функц. анализ, 《Наука》, Алма-Ата, 1966, 16—24.

[37] Коддингтон Е. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.

[38] Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, Изд-во АН УССР, 1937.

[39] Левин Дж., Левинсон Н. (Levin J. J., Levinson N.), Singular perturbations of non-linear systems of differential equations and associated boundary layer equation, J. Rational Mech. and Analysis **3**, № 2 (1954), 247—270.

[40] Ломов С. А., Степенной пограничный слой в задачах с сингулярным возмущением, Изв. АН СССР, сер. матем. **30**, № 4 (1968), 525—572.

[41] Ломов С. А., Построение асимптотических решений некоторых задач с параметрами, Изв, АН СССР, сер. матем. **32**, № 4 (1968), 884—913.

[42] Митропольский Ю. А., Метод усреднения в нелинейной механике,《Наукова думка》, Киев, 1971.

[43] Мищенко Е. Ф., Асимптотическое вычисление периодических решений систем дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных. Изв. АН СССР, сер. матем. **21**, № 5 (1957), 627—654.

[44] Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, 1959.

[45] Моисеев Н. Н., Асимптотические методы в нелинейной механике,《Наука》, 1969.

[46] Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы,《Наука》, 1969.

[47] Петровский И. Г., Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений,《Наука》, 1970.

[48] Понтрягин Л. С., Обыкновенные дифференциальные уравнения,《Наука》, 1970.

[49] Понтрягин Л. С., Асимптотическое поведение решений систем дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных, Изв. АН СССР, сер. матем. **21**, № 5 (1957), 605—626.

[50] Раппопорт И. М., О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд-во АН УССР, 1954.

[51] Рожков В. И., Асимптотика решений уравнений нейтрального типа с малым запаздыванием, Тр. сем. по теории дифф. уравнений с отклоняющимся аргументом, **2**, Изд-во ун-та Дружбы народов, 1963, 208—222.

[52] Рожков В. И., Уравнения нейтрального типа с переменным малым запаздыванием, Дифф. уравнения **2**, № 3 (1966), 407—416.

[53] Сибуя Я. (Sibuya Yasutaka), Some global properties of matrices of functions of one variable, Math. Ann. **161** (1965), 67—77.

[54] Тихонов А. Н., Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных, Матем. сб. **31** (73), № 3 (1952), 575—586.

[55] Тихонов А. Н., О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации, ДАН **151**, № 3 (1963), 501—504.

[56] Тупчиев В. А., О существовании, единственности и асимптотике решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной, ДАН **142**, № 6 (1962), 1261—1264.

[57] Тупчиев В. А., Асимптотика решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром при производной, ДАН **143**, № 6 (1962), 1296—1299.

[58] Тупчиев Ь. А., Об угловых решениях краевых задач с малым параметром при производной в системе уравнений первого порядка, Вестник МГУ, матем., механ., № 3 (1963), 17—24.

[59] Филатов А. Н., Методы усреднения в дифферен нальных и интегро-дифференциальных уравнениях,《Фан》, Ташкент, 1971.

[60] Флэтто Л., Левинсон Н., Периодические решения сингулярно возмущенных систем, Математика (период. сб. переводов) **2** : 2 (1958), 61—68.

[61] Хабер С., Левинсон Н. (Haber S., Levinson N.), A boundary value problem for a singularly perturbed differential equation, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 866—872.

[62] Хейл Дж., Колебания в нелинейных системах,《Мир》, 1966.

[63] Эльсгольц Л. Э., Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом,《Наука》, 1964.

后　记

我们已经介绍了一系列的奇异摄动问题，它们彼此之间都是用同一种算法构造渐近解. 下面我们简要地谈一下其他的奇异摄动理论问题，它们不服从本书上面所介绍的渐近规律性.

在一系列情况下，虽然对于所考虑问题的奇异摄动系统解的定性几何性态具有同样的特性，但是边界层已经不能再用其系数依赖于 $\tau=(t-t_0)/\mu$ 且当 $\tau\to\infty$ 时指数式衰减的 μ 的幂级数来描述. 在 §16 中就谈到这样的非线性问题，即当 $\mu\to 0$ 时，量 z 具有无穷大初值. 从定性关系上，这时 y 的性质是类似于在第二、三章所描述系统中 z 的性质，但是从定量关系上，y 在初始点邻域中的渐近性态不能用第三章的公式来描述. 在 §15 的第 5 段中提到由 Л. С. 庞特里亚金 (Л. С. Понтрягин)、Е. Ф. 米先柯 (Е. Ф. Мищенко) 和其他人所研究的间断现象，虽然在间断点邻域中解的性质就定性关系而言也类似于 §15 一开始讨论的情况，但就定量方面而言差异却很大.

还有一类另一种结构的边界层例子，它是求解在高阶导数前有 $t+\mu$ 因子的线性方程初值问题时产生的边界层，当 $\mu=0$ 时，退化方程的阶数虽然没有降低，但是定解条件丢失了 (因为退化方程当 $t=0$ 时有奇性)，因此也产生了边界层. 对于这种情况，С. В. 洛莫夫 (С. В. Ломов) 做了一系列的研究工作 [40].

当吉洪诺夫极限过程定理中的条件不满足时，可能会产生这样情况，即当 $\mu\to 0$ 时，初值问题的解一般没有极限，而在退化解附近产生无穷大频率的振荡. В. М. 沃洛索夫 (В. М. Волосов) 对这种类型的现象做了一系列的研究工作 (例如参看 [27]). 在 А. Б. 瓦西里耶娃 (А. Б. Васильева) 和 А. А. 普洛特尼科夫 (А. А. Плотников) 的工作中 (例如参看 [21]) 对小时滞系统也研究了类似的现象.

我们只谈到奇异摄动系统中存在的某些现象, 其中之一从表面上来看就像在本书所描述的那样, 而其他的却截然不同. 还有不同的作者对奇异摄动理论中这些截然不同的问题进行过很多单独的研究, 在简评 [10] 中列举了这些工作的详细目录; 但不管怎样, 可以看出这里提到的各种各样现象和问题都是与奇异摄动的存在紧密相联的.

自然就产生关于能否用某种统一的方法来处理这些奇异摄动系统的问题, 包括性质上的不同情况, 亦即既有极限过程趋向于退化解, 也有不趋于任何极限的振动解.

当然, 由于所有奇异摄动理论问题的类别过于多种多样, 大概不可能谈论关于它们的统一简单算法, 但是可以提出关于构造渐近解的某种一般思想, 使得对于每一类特殊问题都可能找到一种相应的算法.

在这方面首先应该注意到的是克雷洛夫–博戈柳博夫 (Крылова-Боголюбова) 的平均化方法 [38], 后来由许多作者的工作所发展 (见 [6, 28, 42, 45, 59]). 关于平均化方法对含有奇异摄动问题的应用, 例如, 在 [10] 中有更详细的介绍.

应当提到的还有前不久由 С. В 洛莫夫提出的正则化方法 (例如参看 [41]), 它是基于在奇异摄动问题中引进新的附加变量而把它转化成正则摄动问题的思想进行研究的.

最后我们指出, 目前对奇异摄动问题的研究在两方面进行, 一方面, 在奇异摄动理论的一致化方向上, 亦即构造统一的工具; 另一方面, 在这个理论的新问题研究方向上, 它们处于数学应用科学的前沿.

作者

[General Information]
□□=□□□□□□□□□□□□
□□=А.Б.□□□□□ В.Ф.□□□□□ □□□ □□□□
□□=198
SS□=11921798
DX□=
□□□□=2008□01□□1□
□□□=□□□□□□□

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
-
17
18 -
-
19
20 6.1 6.2
21